Lösungen: Amann, Escher - Analysis

Kapitel I.

Grundlagen

1. Logische Grundbegriffe

2. Mengen

3. Abbildungen

4. Relationen und Verknüpfungen

5. Die natürlichen Zahlen

Aufgabe 5.2. Folgende Identitäten sind durch vollständige Induktion zu verifizieren:

(a) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$

(b) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$

Beweis. (a) Für $n = 0$ ist die Behauptung klar. Nach Induktionsannahme gelte

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2} \ .$$

Also folgt

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n-1} k + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

(b) Für $n = 0$ ist die Behauptung wieder klar. Sei nach Induktionsannahme

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} +n^2 &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{6n^2}{6} = \frac{(n^2-n)(2n-1)+6n^2}{6} \\ &= \frac{2n^3-n^2-2n^2+n+6n^2}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .\end{aligned}$$

□

Aufgabe 5.5. (a) Man verifiziere, dass für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ gilt:

$$[m!(n-m)!] \mid n!$$

(b) Für $m, n \in \mathbb{N}$ werden die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{m} \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\binom{n}{m} := \begin{cases} \frac{n!}{m!(n-m)!} \ , & n \leq m \\ 0 \ , & m > n \end{cases}$$

Man beweise folgende Rechenregeln:

(i) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$

(ii) $\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}, \ 1 \leq m \leq n$

(iii) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(iv) $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$

Beweis. (a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$.

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

Im Zähler haben wir m Faktoren. Also gibt es einen Faktor $(n-i_1)$, so dass $m \mid (n-i_1)$. Setzen wir dieses Verfahren fort, so finden wir $m! \mid n(n-1)\cdots(n-m+1)$, also $m!(n-m)! \mid n!$.

(b) (i)

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\,(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \binom{n}{m}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!} \\ &= \frac{n! \cdot m}{m!(n-m+1)!} + \frac{n! \cdot (n-m+1)}{m!(n-m+1)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{m!(n-m+1)!} = \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} = \binom{n+1}{m}\end{aligned}$$

(iii) Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion über n. Für $n = 0$ haben wir

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1 = 2^0$$

Nehmen wir an, es gelte $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$, dann folgt mit (ii):

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k} \\ &= 1 + 2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n\end{aligned}$$

(iv) Wiederum verwenden wir Induktion über n. Für $n = 0$ haben wir $\binom{0}{0} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$. Sei nach Induktionsannahme $\sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m}{n+1}$. Dann folgt

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k}{n} + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{n+1} + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+}{n+1}.$$

□

6. Abzählbarkeit

7. Gruppen und Homomorphismen

8. Ringe, Körper und Polynome

Aufgabe 8.1. Es seien a und b kommutierende Elemente eines Ringes mit Eins und $n \in \mathbb{N}$. Man beweise:

(a) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{j=0}^{n} a^j b^{n-j}$

(b) $a^{n+1} - 1 = (a - 1) \sum_{j=0}^{n} a^j$

Beweis. (a)

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{j=0}^{n} a^j b^{n-1} &= \sum_{j=0}^{n} a^{j+1}b^{n-j} - \sum_{j=0}^{n} a^j b^{n+1-j} \\
&= a^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} a^{j+1}b^{n-j} - \sum_{j=1}^{n} a^j b^{n+1-j} - b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{j=0}^{n-1} a^{j+1}b^{n-j} - \sum_{j=0}^{n-1} a^{j+1}b^{n-j}\right) - b^{n+1} \\
&= a^{n+1} - b^{n+1}
\end{aligned}$$

(b) Setze $b = 1$ in (a).

□

Aufgabe 8.3. Sei K ein Körper. Dann ist $K[X]$ nullteilerfrei.

Beweis. Angenommen, es existieren $0 \neq p = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \in K[X]$ und $0 \neq q = \sum_{k=0}^{m} q_k X^k \in K[X]$ mit $pq = 0$, d.h.

$$pq = \left(\sum_{k=0}^{n} p_k X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{m} q_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n+m} \underbrace{\left(\sum_{\ell=0}^{k} p_\ell q_{k-\ell}\right)}_{(pq)_k} X^k = 0$$

Seien i und j die kleinsten Indizes mit $p_i \neq 0$ und $q_j \neq 0$. Dann ist aber

$$\begin{aligned}
(pq)_{i+j} &= \sum_{\ell=0}^{i+j} p_\ell q_{(i+j)-\ell} \\
&= \underbrace{p_0}_{=0} q_{i+j} + \ldots + \underbrace{p_{i-1}}_{=0} q_{j+1} + \underbrace{p_i q_j}_{\neq 0} + p_{i+1} \underbrace{q_{j-1}}_{=0} + \ldots + p_n \underbrace{q_0}_{=0} \neq 0
\end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Aufgabe 8.4. Man zeige, dass ein endlicher Körper nicht angeordnet werden kann.

Beweis. Sei K ein endlicher Körper. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}} = 0\ .$$

Angenommen, K kann angeordnet werden, dann ist

$$0 < 1 < 1 + 1 < \cdots < 1 + \cdots + 1 = 0$$

ein Widerspruch. □

Aufgabe 8.10. Es seien K ein angeordneter Körper und $a, b, c, d \in K$.

(a) Man beweise die Ungleichung

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \ .$$

(b) Gelten $b > 0$, $d > 0$ und $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so folgt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

(c) Für $a, b \in K^\times$ gilt

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geq 2$$

Beweis. (a) Todo.

(b)
- Wegen $b, d > 0$ ist die erste Ungleichung äquivalent zu

  $$a(b+d) = ab + ad < ab + bc = b(a+c) \ .$$

  Nach Abziehen von ab haben wir $ad < bc$. Das ist wiederum äquivalent zur Voraussetzung $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.
- Auch hier ist die Ungleichung äquivalent zu

  $$d(a+c) = ad + cd < bc + cd = c(b+d).$$

  Abziehen von cd führt wiederum auf $ad < bc$.

(c) Wegen $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ ist

$$a^2 + b^2 = \underbrace{(a-b)^2}_{\geq 0} + 2ab \geq 2ab \ .$$

Also folgt

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| = \left|\frac{a^2+b^2}{ab}\right| \geq \left|\frac{2ab}{ab}\right| = 2 \ .$$

□

Aufgabe 8.12. Sei R ein angeordneter Ring und für $a, b \in R$ gelten $a \geq 0$ und $b \geq 0$. Es gebe ein $n \in \mathbb{N}^\times$ mit $a^n = b^n$. Dann ist $a = b$.

Beweis. Falls $a = 0$, dann ist $0 = a^n = b^n$ und da ein angeordneter Ring immer unendlich viele Elemente hat, folgt $b = 0$. Genauso folgt wenn $b = 0$, dass $a = 0$ gelten muss.
Seien $a, b > 0$ vorausgesetzt. Dann folgt aus

$$0 = a^n - b^n = (a-b) \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-j}}_{>0} \ ,$$

dass $a - b = 0$ gelten muss, also $a = b$. □

9. Die rationalen Zahlen

10. Die reellen Zahlen

Aufgabe 10.6. Man beweise die *Bernoullische Ungleichung*: Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \ .$$

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion. Für $n = 0$ ist $(1+x)^0 = 1 \geq 1 = 1+0\cdot x$. Sei nach Induktionsannahme $(1+x)^{n-1} \geq 1 + (n-1)x$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n-1} &= (1+x)(1+x)^{n-1} \geq (1+x)\,(1+(n-1)x) \\ &= 1 + \underbrace{(n-1)x + x}_{=nx} + \underbrace{(n-1)x^2}_{\geq 0} \geq 1 + nx\end{aligned}$$

□

Aufgabe 10.10. Es seien $n \in \mathbb{N}^\times$ und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in [\mathbb{R}^+]^n$. Dann heisst $g(x) := \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j}$ bzw. $a(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j$ **geometrisches** bzw. **arithmetisches Mittel** der $x_1, \ldots, x_n$. Zu beweisen ist die *Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel*, d.h. $g(x) \leq a(x)$.

Beweis. Wir beweisen die Ungleichung per vollständige Induktion über n. Für $n = 1$ gilt $g(x) = x_1 \leq \frac{1}{1}x_1 = a(x)$.
Sei die Behauptung wahr für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir können $x_i > 0$ annehmen für $i = 1, \ldots n+1$, da sonst die Behauptung trivial ist. Seien also $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}_{>0}$ und ohne Einschränkung sei $x_{n+1} \geq x_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist

$$a(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1, \ldots, x_n}{n} \leq \frac{nx_{n+1}}{n} = x_{n+1} \ .$$

Also ist

$$y := \frac{x_{n+1} - a(x_1, \ldots, x_n)}{(n+1)a(x_1, \ldots, x_n)} \geq 0$$

und wegen

$$\begin{aligned}1 + y &= \frac{(n+1)a(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1} - a(x_1, \ldots, x_n)}{(n+1)a(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{na(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1}}{(n+1)a(x_1, \ldots, x_n)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{x_{n+1}}{(n+1)a(x_1, \ldots, x_n)}\end{aligned}$$

folgt aus der Bernoulli-Ungleichung

$$\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{n+1}}{(n+1)a(x_1, \ldots, x_n)}\right)^{n+1} = (1+y)^{n+1} \geq 1 + (n+1)y = \frac{x_{n+1}}{a(x_1, \ldots, x_n)} \ .$$

Nun folgt mit der Induktionsannahme die Behauptung:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} x_j &\geq a(x_1,\dots,x_n)^{n+1}\frac{x_{n+1}}{a(x_1,\dots,x_n)} = a(x_1,\dots,x_n)^n x_{n+1}\\ &\geq g(x_1,\dots,x_n)^n x_{n+1} = \prod_{j=1}^{n+1} x_j\end{aligned}$$

□

Aufgabe 10.11. Für $x = (x_1,\dots,x_n)$ und $y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ sei $x \centerdot y := \sum_{j=1}^n x_j y_j$. Man beweise folgende Ungleichung zwischen dem **gewichteten** *geometrischen* und dem **gewichteten** *arithmetischen Mittel*:

$$\sqrt[|\alpha|]{x^\alpha} \leq \frac{x \centerdot \alpha}{|\alpha|}, \qquad x \in \left[\mathbb{R}^+\right]^n,\ \alpha \in \mathbb{N}^n\ .$$

Beweis. Sei $\alpha := (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $m := |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ und $x = (x_1,\dots,x_n) \in [\mathbb{R}^+]$. Es folgt mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

$$\sqrt[|\alpha|]{x^\alpha} = \sqrt[m]{x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}} \leq \frac{1}{m}\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = \frac{x \centerdot \alpha}{|\alpha|}$$

□

Aufgabe 10.16. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei I_n ein nichtleeres abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$. Die Familie $\{I_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ heisse **Intervallschachtelung**, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(a) $I_{n+1} \subset I_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \epsilon$.

Man beweise:

(i) Zu jeder Intervallschachtelung $\{I_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in \bigcap_n I_n$.

(ii) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Intervallschachtelung $\{I_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ mit rationalen Endpunkten und $\{x\} = \bigcap_n I_n$.

Beweis. (i) Da die $I_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ ist $\bigcap_n I_n \neq \emptyset$.

Angenommen es gäbe zwei verschiedene Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y \in \bigcap_n I_n$. Sei $\epsilon := \frac{|x-y|}{2}$. Nach (b) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|I_N| < \epsilon = \frac{|x-y|}{2}\ .$$

Da $x, y \in I_N$ gilt daher

$$|x-y| \leq |I_N| < \frac{|x-y|}{2}\ ,$$

ein Widerspruch.

(ii) Es ist klar, dass es eine Intervallschachtelung gibt mit mit $\{x\} = \bigcap_n I_n$, man nehme z.B. $I_n := \left[x - \frac{1}{n},\ x + \frac{1}{n}\right]$. Wir müssen zeigen, dass wir diese so wählen können, dass alle Endpunkte der Intervalle I_n rational sind. Sei $\{I_n = [a_n, b_n]\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ eine Intervallschachtelung mit $\{x\} = \bigcap_n I_n$. Nach Satz 10.8 gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{a}_n \in \mathbb{Q}$ und ein $\tilde{b}_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_n < \tilde{a}_n < x$ und $x < \tilde{b}_n < b_n$. Nun haben wir mit $\tilde{I}_n := \{[\tilde{a}_n, \tilde{b}_n]\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ eine Intervallschachtelung mit rationalen Endpunkten gefunden, welche $\{x\} = \bigcap_n \tilde{I}_n$ erfüllt.

□

11. Die komplexen Zahlen

Aufgabe 11.8. Man zeige, dass es ausser der Identität und $z \mapsto \bar{z}$ keinen Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$ gibt, der die Elemente von $\mathbb{R}$ festlässt.

Beweis. Man prüft leicht nach, dass die Konjugationsabbildung $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ ein Körperautomorphismus ist, der die Elemente von $\mathbb{R}$ festlässt.
Sei $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein beliebiger Körperautomorphismus, der die Elemente von $\mathbb{R}$ festlässt. Dann gilt:

$$\varphi(i) \cdot \varphi(i) = \varphi(i^2) = \varphi(-1) = -1 \cdot \varphi(1) = -1$$

Also ist $\varphi(i) = i$ oder $\varphi(i) = -i$. Im ersten Fall haben wir

$$\varphi(x + iy) = \varphi(x) + \varphi(iy) = x\varphi(1) + y\varphi(i) = x + iy\ ,$$

also ist φ die Identität.
Im zweiten Fall haben wir

$$\varphi(x + iy) = \varphi(x) + \varphi(iy) = x\varphi(1) + y\varphi(i) = x - iy\ ,$$

also ist φ die Konjugationsabbildung.

□

Aufgabe 11.11. Man beweise die **Parallelogrammidentität** in $\mathbb{C}$:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2), \quad z, w \in \mathbb{C}$$

Beweis. Seien $z, w \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 + |z - w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} + (z - w)\overline{(z - w)} \\
&= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) + (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) \\
&= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} \\
&= 2z\bar{z} + 2w\bar{w} \\
&= 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)
\end{aligned}$$

□

12. Vektorräume, affine Räume und Algebren

Kapitel II.

Konvergenz

1. Konvergenz von Folgen

2. Das Rechnen mit Zahlenfolgen

3. Normierte Vektorräume

Aufgabe 3.4. Man beweise, dass in jedem Innenproduktraum $(E, (\cdot|\cdot))$ folgende **Parallelogrammidentität** gilt:

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2, \quad x, y \in E$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y|x+y) + (x-y|x-y) \\
&= (x|x+y) + (y|x+y) + (x|x-y) - (y|x-y) \\
&= (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) + (x|x) - (x|y) - (y|x) + (y|y) \\
&= 2(x|x) + 2(y|y) \\
&= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.6. Es sei $(E, (\cdot|\cdot))$ ein reeller Innenproduktraum. Man beweise die Ungleichung

$$(\|x\| + \|y\|)\frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|} \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \ , \quad x, y \in E \setminus \{0\}$$

Wann gilt Gleichheit?

Beweis. Die 2. Ungleichung ist gerade die Dreiecksungleichung. Hier ist also nichts zu beweisen. Die 1. Ungleichung ist trivial, falls $(x|y) \leq 0$, also können wir $(x|y) \geq 0$ annehmen. Nach dem Quadrieren der 1. Ungleichung erhalten wir

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \, \frac{(x|y)^2}{\|x\|^2\|y\|^2} \leq \|x+y\|^2 \ ,$$

was zu zeigen ist. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist $\frac{(x|y)^2}{\|x\|^2\|y\|^2} \leq 1$ und es folgt:

$$
\begin{aligned}
(\|x\| + \|y\|)^2 \frac{(x|y)^2}{\|x\|^2\|y\|^2} &= \left(\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2\right) \frac{(x|y)^2}{\|x\|^2\|y\|^2} \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|}(x|y) \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\frac{\|x\|\|y\|}{\|x\|\|y\|}(x|y) \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y) \\
&= (x|x) + (y|y) + 2(x|y) \\
&= (x+y|x+y) = \|x+y\|^2
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 3.10. Es sei $(E, (\cdot|\cdot))$ ein Innenproduktraum. Zwei Elemente $x, y \in E$ heissen **orthogonal**, wenn $(x|y) = 0$ gilt, man schreibt $x \perp y$. Eine Teilmenge $M \subset E$ heisst **Orthogonalsystem**, wenn $x \perp y$ für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt. M heisst **Orthonormalsystem**, falls M ein Orthogonalsystem ist mit $\|x\| = 1$ für $x \in M$.
Es sei $\{x_0, \dots, x_m\} \subset E$ ein Orthogonalsystem mit $x_j \neq 0$ für $0 \leq j \leq m$. Man beweise:

(a) $\{x_0, \dots, x_m\}$ ist linear unabhängig.

(b) $\left\| \sum_{k=0}^{m} x_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^{m} \|x_k\|^2$ (Satz des Pythagoras)

Beweis. (a) Angenommen $\{x_0, \dots, x_m\}$ ist linear abhängig. Dann gibt es ein $j \in \{0, \dots, m\}$ so, dass $x_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} \alpha_i x_i$ mit $\alpha_i \in \mathbb{K}$, also ist $x_j - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} \alpha_i x_i = 0$. Es folgt

$$
\begin{aligned}
0 = (0|x_j) &= \Big(x_j - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} \alpha_i x_i \Big| x_j\Big) \\
&= (x_j|x_j) - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{m} \alpha_i \underbrace{(x_i|x_j)}_{=0} = (x_j|x_j)\ ,
\end{aligned}
$$

was bedeutet, dass $x_j = 0$ sein muss. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

(b)

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=0}^{m} x_k \right\|^2 &= \Big(\sum_{k=0}^{m} x_k \Big| \sum_{j=0}^{m} x_j \Big) = \sum_{k=0}^{m} \Big(x_k \Big| \sum_{j=0}^{m} x_j \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} \underbrace{(x_k|x_j)}_{=0 \text{ für } k \neq j} = \sum_{k=0}^{m} (x_k|x_k) = \sum_{k=0}^{m} \|x_k\|^2
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 3.11. Es sei F ein Untervektorraum eines Innenproduktraumes E. Man beweise, dass das **orthogonale Komplement** von F, d.h.

$$F^\perp := \{x \in E \;;\; x \perp y,\; y \in F\} ,$$

ein abgeschlossener Untervektorraum von E ist.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $F^\perp$ ein Untervektorraum von E ist.

- Da $(0|y) = 0$ für jedes $y \in F$, ist $0 \in F^\perp$.
- Seien $x_1, x_2 \in F^\perp$. Dann ist $(x_1|y) = (x_2|y) = 0$ für $y \in F$. Also ist auch $(x_1 + x_2|y) = (x_1|y) + (x_2|y) = 0$ für $y \in F$ und somit ist $x_1 + x_2 \in F^\perp$.
- Seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in F^\perp$, dann ist $(x|y) = 0$ für $y \in F$. Also ist auch $(\lambda x|y) = \lambda(x|y) = 0$ für $y \in F$ und somit ist $\lambda x \in F^\perp$.

Es bleibt zu zeigen, dass $F^\perp$ abgeschlossen ist. Sei (x_n) eine Folge in $F^\perp$, die in E konvergiert, d.h. $\lim x_n = x \in E$. Es gilt also $(x_n|y) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $y \in F$. Für $y \in F$ ist

$$(x|y) = (x - x_n|y) + \underbrace{(x_n|y)}_{=0} = (x - x_n|y) .$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$|(x|y)| = |(x - x_n|y)| \leq \|x - x_n\| \|y\| ,$$

und da $\|x_n - x\| \to 0$ für $n \to \infty$ ist $(x|y) = 0$ und somit $x \in F^\perp$, d.h. $F^\perp$ ist abgeschlossen. $\square$

Aufgabe 3.12. Es seien $B = \{u_0, \ldots, u_m\}$ ein Orthonormalsystem im Innenproduktraum $(E, (\cdot|\cdot))$ und $F := \operatorname{span}(B)$. Ferner sei

$$p_F : E \to F, \quad x \to \sum_{k=0}^{m} (x|u_k) u_k .$$

Man beweise:

(a) $x - p_F(x) \in F^\perp,\; x \in E$

Beweis. (a) Sei $y \in F$, $x \in E$. Wegen $F = \operatorname{span}(B)$ kann y geschrieben werden als $y = \sum_{i=0}^m \alpha_i u_i$ für geeignete $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
(x - p_F(x)|y) &= \Big(x - \sum_{k=0}^{m} (x|u_k) u_k \Big| y\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (x|u_i) - \sum_{k=0}^{m} (x|u_k) \Big(u_k \Big| \sum_{i=0}^{m} \alpha_i u_i\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (x|u_i) - \sum_{k=0}^{m} (x|u_k) \sum_{j=0}^{m} \alpha_j (u_k|u_j) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (x|u_i) - \sum_{k=0}^{m} \alpha_k (x|u_k) = 0
\end{aligned}$$

$\square$

4. Monotone Folgen

Aufgabe 4.4. Für $a \in (0, \infty)$ definiere man die reelle Folge (x_n) rekursiv durch $x_0 \geq a$ und

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \ , \ n \in \mathbb{N}$$

Man beweise, dass (x_n) monoton fallend gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Beweis. Man weist einfach nach, dass $x_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2}\right) + a = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2 + a \geq a \end{aligned}$$

Wir weisen nach, dass (x_n) monoton fallend ist:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{a}{2x_n} - \frac{1}{2}x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0$$

Also ist die Folge (x_n) nach unten beschränkt, monoton fallend und konvergiert somit. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\lim x_n = \sqrt{a}$. Aus

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n - \sqrt{a} + \frac{a}{x_n} - \sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)(x_n - \sqrt{a})$$

folgt

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| = \frac{1}{2}\underbrace{\left|1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right|}_{\leq 1}|x_n - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{a}| \leq \ldots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|x_0 - \sqrt{a}| \ ,$$

woraus folgt, dass $x_n \to \sqrt{a}$ für $n \to \infty$.

$\square$

Aufgabe 4.7. (a) Man beweise folgende Fehlerabschätzung für $n \in \mathbb{N}^\times$:

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n n!}$$

(b) Man beweise, dass e eine irrationale Zahl ist.

Beweis. (a) Da $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist die erste Ungleichung klar.

Sei $y_m := \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k!}$. Es gilt $y_m \to e - \sum_{k=0}^{n}$ für $m \to \infty$.

$$\begin{aligned}
y_m = \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}\right] \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{m-2}\right] \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{nn!}
\end{aligned}$$

Also gilt auch die zweite Ungleichung.

(b) Angenommen e ist rational, dann gibt es $p,\ n \in \mathbb{N}^\times$ mit $e = \frac{p}{n}$. Nach (a) gilt dann:

$$0 < \frac{p}{n} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!}$$

Also ist

$$0 < \underbrace{n!p - n\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{Z}} < 1\ .$$

Das ist aber nicht möglich, da es keine ganze Zahl zwischen 0 und 1 gibt.

□

Aufgabe 4.8. Es sei (x_n) rekursiv definiert durch

$$x_0 := 1, \quad x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige, dass die Folge (x_n) konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $x_n > 1$ für $n \geq 1$. Für $n = 1$ haben wir $x_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$. Nehmen wir an, es gilt $x_n > 1$, so folgt $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} > 1$. Unmittelbar aus der rekursiven Definition $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ und aus $x_n > 1$ für $n \geq 1$ folgt $x_n < 2$ für $n \geq 2$. Für $n \geq 1$ gilt sogar $x_n \in [1.5,\ 2]$, da

$$1.5 = 1 + \frac{1}{2} \leq x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \leq 1 + \frac{1}{1} = 2\ .$$

Insbesondere ist die Folge beschränkt.

Als nächstes zeigen wir, dass die Teilfolge (x_{2n}) monoton wachsend ist. Da $x_2 = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ist $x_2 > x_0 = 1$. Nun sei nach Induktionsannahme $x_{2n} \geq x_{2(n-1)}$.

$$\begin{aligned}
x_{2(n+1)} - x_{2n} = 1 + \frac{1}{x_{2n+1}} - \left(1 + \frac{1}{x_{2n-1}}\right) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2n}}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2(n-1)}}} = \frac{x_{2n}}{x_{2n}+1} - \frac{x_{2(n-1)}}{x_{2(n-1)}+1} \\
&= \frac{x_{2n}(x_{2(n-1)}+1) - x_{2(n-1)}(x_{2n}+1)}{(x_{2n}+1)(x_{2(n-1)}+1)} = \frac{x_{2n} - x_{2(n-1)}}{(x_{2n}+1)(x_{2(n-1)}+1)} \geq 0
\end{aligned}$$

Also ist (x_{2n}) eine konvergente Teilfolge von (x_n).
Wir weisen nun nach, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist. Sei dazu $n \geq 1$ beliebig.

$$\begin{aligned}|x_{n+1} - x_n| &= \left|1 + \frac{1}{x_n} - \left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right)\right| = \left|\frac{x_{n-1} - x_n}{x_n \cdot x_{n-1}}\right| \leq \frac{1}{2}|x_{n-1} - x_n| \\ &\leq \ldots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot |x_2 - x_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

Für $m \geq n \geq 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} \pm \ldots - x_n| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

Somit finden wir zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|x_m - x_n| < \epsilon, \quad \text{für } m \geq n \geq N \ ,$$

und (x_n) ist eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge besitzt, also selbst konvergent.
Sei $g \in [1.5,\ 2]$ der Grenzwert von (x_n). Mit den Grenzwertsätzen folgt nun

$$g = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{x_n} = 1 + \frac{1}{g}$$

Diese Gleichung hat die positive Lösung $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

Alternativer Beweis. Wir zeigen per Induktion $|x_n - g| \leq \frac{1}{g^{n+1}}$, wobei g die positive Lösung der Gleichung $g = 1 + \frac{1}{g}$ bezeichnet.
Für $n = 0$ haben wir $|x_0 - g| = |1 - g| = \left|-\frac{1}{g}\right| \leq \frac{1}{g^1}$.
Sei nach Induktionsannahme $|x_{n-1} - g| \leq \frac{1}{g^n}$. Dann folgt wegen $x_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}|x_n - g| &= \left|1 + \frac{1}{x_{n-1}} - \left(1 + \frac{1}{g}\right)\right| = \left|\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{g}\right| \\ &= \left|\frac{g - x_{n-1}}{x_{n-1} \cdot g}\right| \leq \frac{1}{g} \cdot |x_{n-1} - g| \leq \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{g^n} = \frac{1}{g^{n+1}}\end{aligned}$$

Da $g > 1$, folgt $x_n \to g$. □

Aufgabe 4.9. Die **Fibonacci-Zahlen** f_n sind rekursiv definiert durch

$$f_0 := 0 \ , \quad f_1 := 1 \ , \quad f_{n+1} := f_n + f_{n-1} \ , \ n \in \mathbb{N}^\times$$

Man beweise, dass $\lim \left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right) = g$, wobei g der Grenzwert aus Aufgabe 8 bezeichne.

Beweis. Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist monoton wachsend und für $n \geq 1$ gilt $f_n \geq 1$. Sei g der Grenzwert aus Aufgabe 8, also die positive Lösung der quadratischen Gleichung $g = 1 + \frac{1}{g}$. Sei $F_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$, $n \in \mathbb{N}^{\times}$. Wir wollen beweisen, dass die Folge $(F_n)_{n\geq 1}$ den Grenzwert g hat:

$$\begin{aligned}|F_n - g| &= \left|\frac{f_{n+1}}{f_n} - g\right| = \left|\frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} - g\right| = \left|1 + \frac{1}{F_{n-1}} - \left(1 + \frac{1}{g}\right)\right| \\ &= \left|\frac{1}{F_{n-1}} - \frac{1}{g}\right| = \left|\frac{g - F_{n-1}}{F_{n-1} \cdot g}\right| \leq \frac{1}{g}|F_{n-1} - g| \leq \ldots \leq \left(\frac{1}{g}\right)^{n-1} |F_1 - g|\end{aligned}$$

Da $0 < \frac{1}{g} = g - 1 < 1$ folgt $\left(\frac{1}{g}\right)^n \to 0$ für $n \to \infty$ und damit $\lim F_n = g$. □

Aufgabe 4.10. Es seien

$$x_0 := 5\ , \quad x_1 := 1\ , \quad x_{n+1} := \frac{3}{2}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1}\ ,\ n \in \mathbb{N}^{\times}\ .$$

Man verifiziere, dass (x_n) konvergiert und bestimme $\lim x_n$.

Beweis. Für $n \geq 1$ gilt:

$$|x_n - x_{n-1}| = \left|\frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{1}{3}x_{n-2} - x_{n-1}\right| = \frac{1}{3}|x_{n-1} - x_{n-2}| = \ldots = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \underbrace{|x_1 - x_0|}_{=4}$$

Und für $m \geq n \geq 1$ folgt mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} \pm \ldots + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \\ &= 4\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} + 4\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2} + \ldots + 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \\ &= 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left[1 + \frac{1}{3} + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{m-n-1}\right] \\ &\leq 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k} = 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \cdot \frac{3}{2} = 6\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\end{aligned}$$

Also bildet (x_n) eine Cauchyfolge und da $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert sie.
Wir bestimmen nun ihren Grenzwert. Für $n \geq 1$ haben wir

$$\begin{aligned}x_n - x_{n-1} &= \frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{1}{3}x_{n-2} - x_{n-1} = -\frac{1}{3}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 (x_{n-2} - x_{n-3}) \\ &= \ldots = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}(x_1 - x_0) = (-4) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} .\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
x_n &= x_{n-1} + (-4) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= x_{n-2} + (-4) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + (-4) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \ldots = x_0 + (-4) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 5 - 4 \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^k .
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert nun

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 5 - 4 \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 5 - 4 \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 5 - 4 \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}} = 5 - 4 \cdot \frac{3}{4} = 2$$

□

5. Uneigentliche Konvergenz

6. Vollständigkeit

7. Reihen

8. Absolute Konvergenz

9. Potenzreihen

Aufgabe 9.2. Die Potenzreihe $a = \sum_k (1+k)X^k$ hat Konvergenzradius 1 und für die durch a dargestellte Funktion $\underline{a}$ gilt: $\underline{a}(z) = (1-z)^{-2}$ für $|z| < 1$.

Beweis. Sei $a_k = 1 + k$. Dann ist $a = \sum_k a_k X^k$. Es gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1+k}{2+k} \right| = 1$$

Also existiert dieser Grenzwert und nach Satz 9.4 ist

$$\rho_a = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1$$

der Konvergenzradius von a.
Seien $b := \sum_k b_k X^k := \sum_k X^k$ und $c := \sum_k c_k X^k := \sum_k kX^k$. Diese Reihen haben ebenfalls Konvergenzradius 1. Also gilt für $z \in \mathbb{K}$, $|z| < 1$:

$$\underline{a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1+k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} k z^k = \underline{b}(z) + \underline{c}(z)$$

Wir wissen bereits, dass $\underline{b}(z) = \frac{1}{1-z}$. Wir müssen noch $\underline{c}(z)$ berechnen. Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} kz^k$.

$$\begin{aligned}(1-z)s_n &= (1-z)\sum_{k=0}^{n} kz^k = \sum_{k=0}^{n} kz^k - kz^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} kz^k - \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)z^k = 0 + \sum_{k=1}^{n}(kz^k - (k-1)z^k) - nz^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} - nz^{n+1} = z\sum_{k=0}^{n-1} z^k - nz^{n+1} \\ &= z\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right) - \frac{(1-z)nz^{n+1}}{1-z} = \frac{z - z^{n+1} - nz^{n+1} + nz^{n+2}}{1-z} \\ &= \frac{z-(n+1)z^{n+1} + nz^{n+2}}{1-z}\end{aligned}$$

Also haben wir $s_n \to \frac{z}{(1-z)^2}$ für $n \to \infty$ und es folgt

$$\underline{c}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Somit haben wir

$$\underline{a}(z) = \underline{b}(z) + \underline{c}(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1-z+z}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

$\square$

Aufgabe 9.10. Es sei $b = \sum b_k X^k \in \mathbb{C}[\![X]\!]$ mit $(1-X-X^2)b = 1 \in \mathbb{C}[\![X]\!]$

(a) Man verifiziere, dass die Koeffizienten b_k die Rekursionsvorschrift

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad b_{k+1} = b_k + b_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^\times ,$$

erfüllen, d.h. (b_k) ist die Folge der Fibonacci-Zahlen.

(b) Wie gross ist der Konvergenzradius von b?

Beweis. (a) Sei $a := 1 - X - X^2$ und $c := 1 \in \mathbb{C}[\![X]\!]$. Aus $1 = c_0 = a_0 b_0 = b_0$ folgt $b_0 = 1$ und aus $0 = c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1b_1 + (-1)b_0 = b_1 - 1$ folgt $b_1 = 1$. Schliesslich zeigt die Rechnung

$$\begin{aligned}0 = c_{k+1} &= a_0 b_{k+1} + a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \underbrace{a_3 b_{k-2}}_{=0} + \ldots + \underbrace{a_{k+1} b_0}_{=0} \\ &= b_{k+1} - b_k - b_{k-1} ,\end{aligned}$$

dass $b_{k+1} = b_k + b_{k-1}$ für $n \in \mathbb{N}^\times$ gelten muss.

(b) Die Folge (b_n) ist genau die Folge der Fibonacci-Zahlen. Nach Aufgabe 4.9 gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = g$, wobei g der goldene Schnitt bezeichnet. Also folgt mit Satz 9.4:

$$\rho_b = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{b_k}{b_{k+1}} \right| = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right|} = \frac{1}{g}$$

□

Kapitel III.

Stetige Funktionen

1. Stetigkeit

Aufgabe 1.11. Man betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

und setze für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x, x_0), \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x_0, x)$$

Dann gelten:

(a) f_1 und f_2 sind stetig.

(b) f ist stetig in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und unstetig in $(0,0)$.

Beweis. (a) Aus Symmetriegründen reicht es die Stetigkeit von f_1 zu beweisen. Nehmen wir zuerst $x_0 \neq 0$ an. Dann ist f_1 gegeben durch $f_1(x) = f(x, x_0) = \frac{xx_0}{x^2+x_0^2}$. Da der Nenner nie 0 ist, ist diese rationale Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Im Fall $x_0 =$ ist $f_1(x) = \frac{0}{x^2} = 0$ für $x \neq 0$ und $f_1(0) = f(0,0) = 0$, also ist f_1 die Nullfunktion und damit ebenfalls stetig auf $\mathbb{R}$. Es folgt, dass f_1 für jedes feste $x_0 \in \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Sei $(z_n) = ((x_n, y_n))$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z = (x,y) \neq (0,0)$. Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, also auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = x^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n^2 = y^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = xy$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 + y_n^2 = x^2 + y^2$. Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{xy}{x^2+y^2} \ ,$$

also ist f stetig in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$

Es sei nun $(z_n) = ((x_n, x_n))$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = (0,0)$. Dann ist

$$f(x_n, x_n) = \frac{x_n x_n}{x_n^2 + x_n^2} = \frac{x_n^2}{2x_n^2} = \frac{1}{2}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir haben $(x_n, x_n) \to (0,0)$ aber $f(x_n, x_n) \to \frac{1}{2} \neq 0$ für $n \to \infty$ und somit ist f in $(0,0)$ nicht stetig.

$\square$

Aufgabe 1.12. Man zeige, dass jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ Lipschitz-stetig ist.

Beweis. Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear. Da f linear ist, gibt es eine Matrix $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m \times n}$ so, dass $f(x) = Ax$ für $x \in \mathbb{K}^n$. Seien $x, y \in \mathbb{K}^n$. Mit Satz II.3.12 und der Dreiecksungleichung folgt:

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(y)\| &\leq \sqrt{m}\|f(x) - f(y)\|_\infty = \sqrt{m}\|f(x-y)\|_\infty = \sqrt{m}\|A(x-y)\|_\infty \\
&= \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} \Big| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - y_j) \Big| \\
&\leq \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j - y_j| \\
&\leq \sqrt{m} \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}| \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| \\
&\leq \sqrt{m} \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}| \cdot n \|x - y\|_\infty \\
&\leq \underbrace{n\sqrt{m} \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}|}_{=:\alpha} \|x - y\|
\end{aligned}$$

Dies beweist die Lipschitz-Stetigkeit von f. $\square$

Aufgabe 1.13. Es seien $(E, (\cdot|\cdot))$ ein Innenproduktraum und $x_0 \in E$. Dann sind die Abbildungen

$$f : E \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto (x|x_0), \qquad g : E \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto (x_0|x)$$

stetig.

Beweis. Sei $\tilde{x} \in E$, $\epsilon > 0$ und $\delta := \frac{\epsilon}{\|x_0\|}$. Für $x \in E$ mit $\|x - \tilde{x}\| < \delta$ folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(\tilde{x})| &= |(x|x_0) - (\tilde{x}|x_0)| = |(x - \tilde{x}|x_0)| \\
&\leq \|x - \tilde{x}\|\|x_0\| < \delta\|x_0\| = \epsilon \ ,
\end{aligned}$$

also ist f stetig. Analog beweist man die Stetigkeit von g. $\square$

2. Topologische Grundbegriffe

3. Kompaktheit

4. Zusammenhang

5. Funktionen in $\mathbb{R}$

6. Die Exponentialfunktion und Verwandte

Kapitel IV.

Differentialrechnung in einer Variablen

Kapitel V.

Funktionenfolgen

1. **Gleichmässige Konvergenz**
2. **Stetigkeit und Differenzierbarkeit bei Funktionenfolgen**
3. **Analytische Funktionen**
4. **Polynomiale Approximation**

Kapitel VI.

Integralrechnung in einer Variablen

Kapitel VII.

Differentialrechnung in mehrerer Variabler

Kapitel VIII.

Kurvenintegrale

1. **Kurven und ihre Länge**
2. **Kurven in $\mathbb{R}^n$**
3. **Pfaffsche Formen**
4. **Kurvenintegrale**
5. **Holomorphe Funktionen**
6. **Meromorphe Funktionen**