

Lösungen: Amann, Escher - Analysis

Kapitel I.

Grundlagen

1. Logische Grundbegriffe
2. Mengen
3. Abbildungen
4. Relationen und Verknüpfungen
5. Die natürlichen Zahlen
6. Abzählbarkeit
7. Gruppen und Homomorphismen
8. Ringe, Körper und Polynome
9. Die rationalen Zahlen
10. Die reellen Zahlen
11. Die komplexen Zahlen
12. Vektorräume, affine Räume und Algebren

Kapitel II.

Konvergenz

1. Konvergenz von Folgen
2. Das Rechnen mit Zahlenfolgen
3. Normierte Vektorräume
4. Monotone Folgen
5. Uneigentliche Konvergenz
6. Vollständigkeit
7. Reihen
8. Absolute Konvergenz
9. Potenzreihen

Aufgabe 9.2. Die Potenzreihe $a = \sum_k (1+k)X^k$ hat Konvergenzradius 1 und für die durch a dargestellte Funktion \underline{a} gilt: $\underline{a}(z) = (1-z)^{-2}$ für $|z| < 1$.

Beweis. Sei $a_k = 1+k$. Dann ist $a = \sum_k a_k X^k$. Es gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1+k}{2+k} \right| = 1$$

Also existiert dieser Grenzwert und nach Satz 9.4 ist

$$\rho_a = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1$$

der Konvergenzradius von a .

Seien $b := \sum_k b_k X^k := \sum_k X^k$ und $c := \sum_k c_k X^k := \sum_k k X^k$. Diese Reihen haben ebenfalls Konvergenzradius 1. Also gilt für $z \in \mathbb{K}$, $|z| < 1$:

$$\underline{a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} k z^k = \underline{b}(z) + \underline{c}(z)$$

Wir wissen bereits, dass $\underline{b}(z) = \frac{1}{1-z}$. Wir müssen noch $\underline{c}(z)$ berechnen. Sei $s_n := \sum_{k=0}^n kz^k$.

$$\begin{aligned}
(1-z)s_n &= (1-z) \sum_{k=0}^n kz^k = \sum_{k=0}^n kz^k - kz^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^n kz^k - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)z^k = 0 + \sum_{k=1}^n (kz^k - (k-1)z^k) - nz^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} - nz^{n+1} = z \sum_{k=0}^{n-1} z^k - nz^{n+1} \\
&= z \left(\frac{1-z^n}{1-z} \right) - \frac{(1-z)nz^{n+1}}{1-z} = \frac{z - z^{n+1} - nz^{n+1} + nz^{n+2}}{1-z} \\
&= \frac{z - (n+1)z^{n+1} + nz^{n+2}}{1-z}
\end{aligned}$$

Also haben wir $s_n \rightarrow \frac{z}{(1-z)^2}$ für $n \rightarrow \infty$ und es folgt

$$\underline{c}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Somit haben wir

$$\underline{a}(z) = \underline{b}(z) + \underline{c}(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1-z+z}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

□

Kapitel III.

Stetige Funktionen

1. Stetigkeit
2. Topologische Grundbegriffe
3. Kompaktheit
4. Zusammenhang
5. Funktionen in \mathbb{R}
6. Die Exponentialfunktion und Verwandte

Kapitel IV.

Differentialrechnung in einer Variablen

1. Differenzierbarkeit
2. Mittelwertsätze und ihre Anwendung
3. Taylorsche Formeln
4. Iterationsverfahren

Kapitel V.

Funktionenfolgen

1. Gleichmässige Konvergenz
2. Stetigkeit und Differenzierbarkeit bei Funktionenfolgen
3. Analytische Funktionen
4. Polynomiale Approximation

Kapitel VI.

Integralrechnung in einer Variablen

1. Sprungstetige Funktionen
2. Stetige Erweiterungen
3. Das Cauchy-Riemannsche Integral
4. Eigenschaften des Integrals
5. Die Technik des Integrierens
6. Summen und Integrale
7. Fourierreihen
8. Uneigentliche Integrale
9. Die Gammafunktion

Kapitel VII.

Differentialrechnung in mehrerer Variabler

1. Stetige lineare Abbildungen
2. Differenzierbarkeit
3. Rechenregeln
4. Multilineare Abbildungen
5. Höhere Ableitungen
6. Nemytskiioperatoren und Variationsrechnung
7. Umkehrabbildungen
8. Implizite Funktionen
9. Mannigfaltigkeiten
10. Tangenten und Normalen

Kapitel VIII.

Kurvenintegrale

1. Kurven und ihre Länge
2. Kurven in \mathbb{R}^n
3. Pfaffsche Formen
4. Kurvenintegrale
5. Holomorphe Funktionen
6. Meromorphe Funktionen