

Lösungen: Amann, Escher - Analysis

Kapitel I.

Grundlagen

1. Logische Grundbegriffe
2. Mengen
3. Abbildungen
4. Relationen und Verknüpfungen
5. Die natürlichen Zahlen

Aufgabe 5.2. Folgende Identitäten sind durch vollständige Induktion zu verifizieren:

$$(a) \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$
$$(b) \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Beweis. (a) Für $n = 0$ ist die Behauptung klar. Nach Induktionsannahme gelte

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Also folgt

$$\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=0}^{n-1} k + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) Für $n = 0$ ist die Behauptung wieder klar. Sei nach Induktionsannahme

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n k^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} + n^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{6n^2}{6} = \frac{(n^2-n)(2n-1) + 6n^2}{6} \\
 &= \frac{2n^3 - n^2 - 2n^2 + n + 6n^2}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 5.5. (a) Man verifiziere, dass für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ gilt:

$$[m!(n-m)!] \mid n!$$

(b) Für $m, n \in \mathbb{N}$ werden die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{m} \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\binom{n}{m} := \begin{cases} \frac{n!}{m!(n-m)!}, & n \leq m \\ 0, & m > n \end{cases}$$

Man beweise folgende Rechenregeln:

- (i) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$
- (ii) $\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}$, $1 \leq m \leq n$
- (iii) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
- (iv) $\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$

Beweis. (a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$.

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-m+1)}{m!}$$

Im Zähler haben wir m Faktoren. Also gibt es einen Faktor $(n-i_1)$, so dass $m \mid (n-i_1)$. Setzen wir dieses Verfahren fort, so finden wir $m! \mid n(n-1) \cdots (n-m+1)$, also $m!(n-m)! \mid n!$.

(b) (i)

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \binom{n}{m}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!} \\
 &= \frac{n! \cdot m}{m!(n-m+1)!} + \frac{n! \cdot (n-m+1)}{m!(n-m+1)!} \\
 &= \frac{n!(n+1)}{m!(n-m+1)!} = \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} = \binom{n+1}{m}
 \end{aligned}$$

- (iii) Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion über n . Für $n = 0$ haben wir

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1 = 2^0$$

Nehmen wir an, es gelte $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$, dann folgt mit (ii):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} &= 1 + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k} \\ &= 1 + 2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n \end{aligned}$$

- (iv) Wiederum verwenden wir Induktion über n . Für $n = 0$ haben wir $\binom{0}{0} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$. Sei nach Induktionsannahme $\sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m}{n+1}$. Dann folgt

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k}{n} + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{n+1} + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}.$$

□

6. Abzählbarkeit

7. Gruppen und Homomorphismen

8. Ringe, Körper und Polynome

Aufgabe 8.1. Es seien a und b kommutierende Elemente eines Ringes mit Eins und $n \in \mathbb{N}$. Man beweise:

(a) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{j=0}^n a^j b^{n-j}$

(b) $a^{n+1} - 1 = (a - 1) \sum_{j=0}^n a^j$

Beweis. (a)

$$\begin{aligned}
(a-b) \sum_{j=0}^n a^j b^{n-1} &= \sum_{j=0}^n a^{j+1} b^{n-j} - \sum_{j=0}^n a^j b^{n+1-j} \\
&= a^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} a^{j+1} b^{n-j} - \sum_{j=1}^n a^j b^{n+1-j} - b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{j=0}^{n-1} a^{j+1} b^{n-j} - \sum_{j=0}^{n-1} a^{j+1} b^{n-j} \right) - b^{n+1} \\
&= a^{n+1} - b^{n+1}
\end{aligned}$$

(b) Setze $b = 1$ in (a). □

Aufgabe 8.3. Sei K ein Körper. Dann ist $K[X]$ nullteilerfrei.

Beweis. Angenommen, es existieren $0 \neq p = \sum_{k=0}^n p_k X^k \in K[X]$ und $0 \neq q = \sum_{k=0}^m q_k X^k \in K[X]$ mit $pq = 0$, d.h.

$$pq = \left(\sum_{k=0}^n p_k X^k \right) \left(\sum_{k=0}^m q_k X^k \right) = \sum_{k=0}^{n+m} \underbrace{\left(\sum_{\ell=0}^k p_\ell q_{k-\ell} \right)}_{(pq)_k} X^k = 0$$

Seien i und j die kleinsten Indizes mit $p_i \neq 0$ und $q_j \neq 0$. Dann ist aber

$$\begin{aligned}
(pq)_{i+j} &= \sum_{\ell=0}^{i+j} p_\ell q_{(i+j)-\ell} \\
&= \underbrace{p_0}_{=0} q_{i+j} + \dots + \underbrace{p_{i-1}}_{=0} q_{j+1} + \underbrace{p_i}_{\neq 0} q_j + \underbrace{p_{i+1}}_{=0} q_{j-1} + \dots + p_n \underbrace{q_0}_{=0} \neq 0
\end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Aufgabe 8.4. Man zeige, dass ein endlicher Körper nicht angeordnet werden kann.

Beweis. Sei K ein endlicher Körper. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ mal}} = 0.$$

Angenommen, K kann angeordnet werden, dann ist

$$0 < 1 < 1 + 1 < \dots < 1 + \dots + 1 = 0$$

ein Widerspruch. □

Aufgabe 8.10. Es seien K ein angeordneter Körper und $a, b, c, d \in K$.

(a) Man beweise die Ungleichung

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} .$$

(b) Gelten $b > 0$, $d > 0$ und $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so folgt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

(c) Für $a, b \in K^\times$ gilt

$$\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| \geq 2$$

Beweis. (a) Todo.

(b) • Wegen $b, d > 0$ ist die erste Ungleichung äquivalent zu

$$a(b+d) = ab + ad < ab + bc = b(a+c) .$$

Nach Abziehen von ab haben wir $ad < bc$. Das ist wiederum äquivalent zur Voraussetzung $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

• Auch hier ist die Ungleichung äquivalent zu

$$d(a+c) = ad + cd < bc + cd = c(b+d).$$

Abziehen von cd führt wiederum auf $ad < bc$.

(c) Wegen $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ ist

$$a^2 + b^2 = \underbrace{(a-b)^2}_{\geq 0} + 2ab \geq 2ab .$$

Also folgt

$$\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{a^2 + b^2}{ab} \right| \geq \left| \frac{2ab}{ab} \right| = 2 .$$

□

Aufgabe 8.12. Sei R ein angeordneter Ring und für $a, b \in R$ gelten $a \geq 0$ und $b \geq 0$. Es gebe ein $n \in \mathbb{N}^\times$ mit $a^n = b^n$. Dann ist $a = b$.

Beweis. Falls $a = 0$, dann ist $0 = a^n = b^n$ und da ein angeordneter Ring immer unendlich viele Elemente hat, folgt $b = 0$. Genauso folgt wenn $b = 0$, dass $a = 0$ gelten muss.

Seien $a, b > 0$ vorausgesetzt. Dann folgt aus

$$0 = a^n - b^n = (a-b) \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-j}}_{>0} ,$$

dass $a-b=0$ gelten muss, also $a=b$.

□

9. Die rationalen Zahlen

10. Die reellen Zahlen

Aufgabe 10.6. Man beweise die *Bernoullische Ungleichung*: Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx .$$

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion. Für $n=0$ ist $(1+x)^0 = 1 \geq 1 = 1+0 \cdot x$. Sei nach Induktionsannahme $(1+x)^{n-1} \geq 1+(n-1)x$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n-1} &= (1+x)(1+x)^{n-1} \geq (1+x)(1+(n-1)x) \\ &= 1 + \underbrace{(n-1)x + x}_{=nx} + \underbrace{(n-1)x^2}_{\geq 0} \geq 1+nx\end{aligned}$$

□

Aufgabe 10.10. Es seien $n \in \mathbb{N}^\times$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in [\mathbb{R}^+]^n$. Dann heisst $g(x) := \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j}$ bzw. $a(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ **geometrisches** bzw. **arithmetisches Mittel** der x_1, \dots, x_n . Zu beweisen ist die *Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel*, d.h. $g(x) \leq a(x)$.

Beweis. Wir beweisen die Ungleichung per vollständige Induktion über n . Für $n=1$ gilt $g(x) = x_1 \leq \frac{1}{1}x_1 = a(x)$.

Sei die Behauptung wahr für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir können $x_i > 0$ annehmen für $i = 1, \dots, n+1$, da sonst die Behauptung trivial ist. Seien also $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}_{>0}$ und ohne Einschränkung sei $x_{n+1} \geq x_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dann ist

$$a(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1, \dots, x_n}{n} \leq \frac{nx_{n+1}}{n} = x_{n+1} .$$

Also ist

$$y := \frac{x_{n+1} - a(x_1, \dots, x_n)}{(n+1)a(x_1, \dots, x_n)} \geq 0$$

und wegen

$$\begin{aligned}1+y &= \frac{(n+1)a(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1} - a(x_1, \dots, x_n)}{(n+1)a(x_1, \dots, x_n)} = \frac{na(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}}{(n+1)a(x_1, \dots, x_n)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{x_{n+1}}{(n+1)a(x_1, \dots, x_n)}\end{aligned}$$

folgt aus der Bernoulli-Ungleichung

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{(n+1)a(x_1, \dots, x_n)} \right)^{n+1} = (1+y)^{n+1} \geq 1 + (n+1)y = \frac{x_{n+1}}{a(x_1, \dots, x_n)} .$$

Nun folgt mit der Induktionsannahme die Behauptung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} x_j &\geq a(x_1, \dots, x_n)^{n+1} \frac{x_{n+1}}{a(x_1, \dots, x_n)} = a(x_1, \dots, x_n)^n x_{n+1} \\ &\geq g(x_1, \dots, x_n)^n x_{n+1} = \prod_{j=1}^{n+1} x_j \end{aligned}$$

□

Aufgabe 10.11. Für $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ sei $x \bullet y := \sum_{j=1}^n x_j y_j$. Man beweise folgende Ungleichung zwischen dem **gewichteten geometrischen** und dem **gewichteten arithmetischen Mittel**:

$$\sqrt[n]{x^\alpha} \leq \frac{x \bullet \alpha}{|\alpha|}, \quad x \in [\mathbb{R}^+]^n, \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Beweis. Sei $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $m := |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in [\mathbb{R}^+]$. Es folgt mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

$$\sqrt[n]{x^\alpha} = \sqrt[m]{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}} \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = \frac{x \bullet \alpha}{|\alpha|}$$

□

Aufgabe 10.16. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei I_n ein nichtleeres abgeschlossenes Intervall in \mathbb{R} . Die Familie $\{I_n ; n \in \mathbb{N}\}$ heiße **Intervallschachtelung**, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (a) $I_{n+1} \subset I_n$ für $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \epsilon$.

Man beweise:

- (i) Zu jeder Intervallschachtelung $\{I_n ; n \in \mathbb{N}\}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in \bigcap_n I_n$.
- (ii) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Intervallschachtelung $\{I_n ; n \in \mathbb{N}\}$ mit rationalen Endpunkten und $\{x\} = \bigcap_n I_n$.

Beweis. (i) Da die $I_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ ist $\bigcap_n I_n \neq \emptyset$.

Angenommen es gäbe zwei verschiedene Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y \in \bigcap_n I_n$. Sei $\epsilon := \frac{|x-y|}{2}$. Nach (b) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|I_N| < \epsilon = \frac{|x-y|}{2}.$$

Da $x, y \in I_N$ gilt daher

$$|x-y| \leq |I_N| < \frac{|x-y|}{2},$$

ein Widerspruch.

- (ii) Es ist klar, dass es eine Intervallschachtelung gibt mit $\{x\} = \bigcap_n I_n$, man nehme z.B. $I_n := [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$. Wir müssen zeigen, dass wir diese so wählen können, dass alle Endpunkte der Intervalle I_n rational sind. Sei $\{I_n = [a_n, b_n] ; n \in \mathbb{N}\}$ eine Intervallschachtelung mit $\{x\} = \bigcap_n I_n$. Nach Satz 10.8 gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{a}_n \in \mathbb{Q}$ und ein $\tilde{b}_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_n < \tilde{a}_n < x$ und $x < \tilde{b}_n < b_n$. Nun haben wir mit $\tilde{I}_n := [\tilde{a}_n, \tilde{b}_n] ; n \in \mathbb{N}$ eine Intervallschachtelung mit rationalen Endpunkten gefunden, welche $\{x\} = \bigcap_n \tilde{I}_n$ erfüllt.

□

11. Die komplexen Zahlen

Aufgabe 11.8. Man zeige, dass es ausser der Identität und $z \mapsto \bar{z}$ keinen Körperautomorphismus von \mathbb{C} gibt, der die Elemente von \mathbb{R} festlässt.

Beweis. Man prüft leicht nach, dass die Konjugationsabbildung $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$ ein Körperautomorphismus ist, der die Elemente von \mathbb{R} festlässt.

Sei $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein beliebiger Körperautomorphismus, der die Elemente von \mathbb{R} festlässt. Dann gilt:

$$\varphi(i) \cdot \varphi(i) = \varphi(i^2) = \varphi(-1) = -1 \cdot \varphi(1) = -1$$

Also ist $\varphi(i) = i$ oder $\varphi(i) = -i$. Im ersten Fall haben wir

$$\varphi(x + iy) = \varphi(x) + \varphi(iy) = x\varphi(1) + y\varphi(i) = x + iy ,$$

also ist φ die Identität.

Im zweiten Fall haben wir

$$\varphi(x + iy) = \varphi(x) + \varphi(iy) = x\varphi(1) + y\varphi(i) = x - iy ,$$

also ist φ die Konjugationsabbildung.

□

Aufgabe 11.11. Man beweise die **Parallelogrammidentität** in \mathbb{C} :

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2), \quad z, w \in \mathbb{C}$$

Beweis. Seien $z, w \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} |z + w|^2 + |z - w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} + (z - w)\overline{(z - w)} \\ &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) + (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= 2z\bar{z} + 2w\bar{w} \\ &= 2(|z|^2 + |w|^2) \end{aligned}$$

□

12. Vektorräume, affine Räume und Algebren

Kapitel II.

Konvergenz

1. Konvergenz von Folgen

2. Das Rechnen mit Zahlenfolgen

3. Normierte Vektorräume

Aufgabe 3.4. Man beweise, dass in jedem Innenproduktraum $(E, (\cdot|\cdot))$ folgende **Parallelogrammidentität** gilt:

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2, \quad x, y \in E$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y|x + y) + (x - y|x - y) \\ &= (x|x + y) + (y|x + y) + (x|x - y) - (y|x - y) \\ &= (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) + (x|x) - (x|y) - (y|x) + (y|y) \\ &= 2(x|x) + 2(y|y) \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.6. Es sei $(E, (\cdot|\cdot))$ ein reeller Innenproduktraum. Man beweise die Ungleichung

$$(\|x\| + \|y\|) \frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|} \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in E \setminus \{0\}$$

Wann gilt Gleichheit?

Beweis. Die 2. Ungleichung ist gerade die Dreiecksungleichung. Hier ist also nichts zu beweisen. Die 1. Ungleichung ist trivial, falls $(x|y) \leq 0$, also können wir $(x|y) \geq 0$ annehmen. Nach dem Quadrieren der 1. Ungleichung erhalten wir

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \frac{(x|y)^2}{\|x\|^2 \|y\|^2} \leq \|x + y\|^2,$$

was zu zeigen ist. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist $\frac{(x|y)^2}{\|x\|^2\|y\|^2} \leq 1$ und es folgt:

$$\begin{aligned}
(\|x\| + \|y\|)^2 \frac{(x|y)^2}{\|x\|^2\|y\|^2} &= (\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2) \frac{(x|y)^2}{\|x\|^2\|y\|^2} \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|} (x|y) \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \frac{\|x\|\|y\|}{\|x\|\|y\|} (x|y) \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y) \\
&= (x|x) + (y|y) + 2(x|y) \\
&= (x + y|x + y) = \|x + y\|^2
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.10. Es sei $(E, (\cdot|\cdot))$ ein Innenproduktraum. Zwei Elemente $x, y \in E$ heißen **orthogonal**, wenn $(x|y) = 0$ gilt, man schreibt $x \perp y$. Eine Teilmenge $M \subset E$ heisst **Orthogonalsystem**, wenn $x \perp y$ für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt. M heisst **Orthonormalsystem**, falls M ein Orthogonalsystem ist mit $\|x\| = 1$ für $x \in M$.

Es sei $\{x_0, \dots, x_m\} \subset E$ ein Orthogonalsystem mit $x_j \neq 0$ für $0 \leq j \leq m$. Man beweise:

(a) $\{x_0, \dots, x_m\}$ ist linear unabhängig.

(b) $\left\| \sum_{k=0}^m x_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^m \|x_k\|^2$ (Satz des Pythagoras)

Beweis. (a) Angenommen $\{x_0, \dots, x_m\}$ ist linear abhängig. Dann gibt es ein $j \in$

$\{0, \dots, m\}$ so, dass $x_j = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m \alpha_i x_i$ mit $\alpha_i \in \mathbb{K}$, also ist $x_j - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m \alpha_i x_i = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= (0|x_j) = \left(x_j - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m \alpha_i x_i \middle| x_j \right) \\
&= (x_j|x_j) - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m \alpha_i \underbrace{(x_i|x_j)}_{=0} = (x_j|x_j),
\end{aligned}$$

was bedeutet, dass $x_j = 0$ sein muss. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

(b)

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=0}^m x_k \right\|^2 &= \left(\sum_{k=0}^m x_k \middle| \sum_{j=0}^m x_j \right) = \sum_{k=0}^m \left(x_k \middle| \sum_{j=0}^m x_j \right) \\
&= \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^m \underbrace{(x_k|x_j)}_{=0 \text{ für } k \neq j} = \sum_{k=0}^m (x_k|x_k) = \sum_{k=0}^m \|x_k\|^2
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.11. Es sei F ein Untervektorraum eines Innenproduktraumes E . Man beweise, dass das **orthogonale Komplement** von F , d.h.

$$F^\perp := \{x \in E ; x \perp y, y \in F\} ,$$

ein abgeschlossener Untervektorraum von E ist.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass F^\perp ein Untervektorraum von E ist.

- Da $(0|y) = 0$ für jedes $y \in F$, ist $0 \in F^\perp$.
- Seien $x_1, x_2 \in F^\perp$. Dann ist $(x_1|y) = (x_2|y) = 0$ für $y \in F$. Also ist auch $(x_1 + x_2|y) = (x_1|y) + (x_2|y) = 0$ für $y \in F$ und somit ist $x_1 + x_2 \in F^\perp$.
- Seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in F^\perp$, dann ist $(x|y) = 0$ für $y \in F$. Also ist auch $(\lambda x|y) = \lambda(x|y) = 0$ für $y \in F$ und somit ist $\lambda x \in F^\perp$.

Es bleibt zu zeigen, dass F^\perp abgeschlossen ist. Sei (x_n) eine Folge in F^\perp , die in E konvergiert, d.h. $\lim x_n = x \in E$. Es gilt also $(x_n|y) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $y \in F$. Für $y \in F$ ist

$$(x|y) = (x - x_n|y) + \underbrace{(x_n|y)}_{=0} = (x - x_n|y) .$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$|(x|y)| = |(x - x_n|y)| \leq \|x - x_n\| \|y\| ,$$

und da $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ ist $(x|y) = 0$ und somit $x \in F^\perp$, d.h. F^\perp ist abgeschlossen. \square

Aufgabe 3.12. Es seien $B = \{u_0, \dots, u_m\}$ ein Orthonormalsystem im Innenproduktraum $(E, (\cdot|\cdot))$ und $F := \text{span}(B)$. Ferner sei

$$p_F : E \rightarrow F, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^m (x|u_k) u_k .$$

Man beweise:

$$(a) \quad x - p_F(x) \in F^\perp, \quad x \in E$$

Beweis. (a) Sei $y \in F$, $x \in E$. Wegen $F = \text{span}(B)$ kann y geschrieben werden als $y = \sum_{i=0}^m \alpha_i u_i$ für geeignete $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} (x - p_F(x)|y) &= \left(x - \sum_{k=0}^m (x|u_k) u_k \middle| y \right) \\ &= \sum_{i=0}^m \alpha_i (x|u_i) - \sum_{k=0}^m (x|u_k) \left(u_k \middle| \sum_{i=0}^m \alpha_i u_i \right) \\ &= \sum_{i=0}^m \alpha_i (x|u_i) - \sum_{k=0}^m (x|u_k) \sum_{j=0}^m \alpha_j (u_k|u_j) \\ &= \sum_{i=0}^m \alpha_i (x|u_i) - \sum_{k=0}^m \alpha_k (x|u_k) = 0 \end{aligned}$$

□

4. Monotone Folgen

Aufgabe 4.4. Für $a \in (0, \infty)$ definiere man die reelle Folge (x_n) rekursiv durch $x_0 \geq a$ und

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Man beweise, dass (x_n) monoton fallend gegen \sqrt{a} konvergiert.

Beweis. Man weist einfach nach, dass $x_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= \left(\frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \right)^2 = \frac{1}{4} \left(x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2} \right) + a = \frac{1}{4} \left(x_n - \frac{a}{x_n} \right)^2 + a \geq a \end{aligned}$$

Wir weisen nach, dass (x_n) monoton fallend ist:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - x_n = \frac{a}{2x_n} - \frac{1}{2}x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0$$

Also ist die Folge (x_n) nach unten beschränkt, monoton fallend und konvergiert somit. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\lim x_n = \sqrt{a}$. Aus

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(x_n - \sqrt{a} + \frac{a}{x_n} - \sqrt{a} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n} \right) (x_n - \sqrt{a})$$

folgt

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| = \frac{1}{2} \underbrace{\left| 1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n} \right|}_{\leq 1} |x_n - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2} |x_n - \sqrt{a}| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} |x_0 - \sqrt{a}|,$$

woraus folgt, dass $x_n \rightarrow \sqrt{a}$ für $n \rightarrow \infty$.

□

Aufgabe 4.7. (a) Man beweise folgende Fehlerabschätzung für $n \in \mathbb{N}^\times$:

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!}$$

(b) Man beweise, dass e eine irrationale Zahl ist.

Beweis. (a) Da $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist die erste Ungleichung klar.

Sei $y_m := \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k!}$. Es gilt $y_m \rightarrow e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ für $m \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} y_m &= \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+2) \dots (n+m)} \right] \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n+1} \right)^{m-2} \right] \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^k = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{nn!} \end{aligned}$$

Also gilt auch die zweite Ungleichung.

(b) Angenommen e ist rational, dann gibt es $p, n \in \mathbb{N}^\times$ mit $e = \frac{p}{n}$. Nach (a) gilt dann:

$$0 < \frac{p}{n} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!}$$

Also ist

$$0 < \underbrace{n!p - n \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{Z}} < 1.$$

Das ist aber nicht möglich, da es keine ganze Zahl zwischen 0 und 1 gibt. □

Aufgabe 4.8. Es sei (x_n) rekursiv definiert durch

$$x_0 := 1, \quad x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige, dass die Folge (x_n) konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $x_n > 1$ für $n \geq 1$. Für $n = 1$ haben wir $x_1 = 1 + \frac{1}{x_0} = 2$. Nehmen wir an, es gilt $x_n > 1$, so folgt $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} > 1$. Unmittelbar aus der rekursiven Definition $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ und aus $x_n > 1$ für $n \geq 1$ folgt $x_n < 2$ für $n \geq 2$. Für $n \geq 1$ gilt sogar $x_n \in [1.5, 2]$, da

$$1.5 = 1 + \frac{1}{2} \leq x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \leq 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

Insbesondere ist die Folge beschränkt.

Als nächstes zeigen wir, dass die Teilfolge (x_{2n}) monoton wachsend ist. Da $x_2 = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ist $x_2 > x_0 = 1$. Nun sei nach Induktionsannahme $x_{2n} \geq x_{2(n-1)}$.

$$\begin{aligned} x_{2(n+1)} - x_{2n} &= 1 + \frac{1}{x_{2n+1}} - \left(1 + \frac{1}{x_{2n-1}} \right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2n}}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2(n-1)}}} = \frac{x_{2n}}{x_{2n} + 1} - \frac{x_{2(n-1)}}{x_{2(n-1)} + 1} \\ &= \frac{x_{2n}(x_{2(n-1)} + 1) - x_{2(n-1)}(x_{2n} + 1)}{(x_{2n} + 1)(x_{2(n-1)} + 1)} = \frac{x_{2n} - x_{2(n-1)}}{(x_{2n} + 1)(x_{2(n-1)} + 1)} \geq 0 \end{aligned}$$

Also ist (x_{2n}) eine konvergente Teilfolge von (x_n) .

Wir weisen nun nach, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist. Sei dazu $n \geq 1$ beliebig.

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= \left| 1 + \frac{1}{x_n} - \left(1 + \frac{1}{x_{n-1}} \right) \right| = \left| \frac{x_{n-1} - x_n}{x_n \cdot x_{n-1}} \right| \leq \frac{1}{2} |x_{n-1} - x_n| \\ &\leq \dots \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot |x_2 - x_1| = \left(\frac{1}{2} \right)^n \end{aligned}$$

Für $m \geq n \geq 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} \pm \dots - x_n| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq \left(\frac{1}{2} \right)^{m-1} + \left(\frac{1}{2} \right)^{m-2} + \dots + \left(\frac{1}{2} \right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^n \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2} \right)^k \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n \cdot 2 = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

Somit finden wir zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|x_m - x_n| < \epsilon, \quad \text{für } m \geq n \geq N,$$

und (x_n) ist eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge besitzt, also selbst konvergent.

Sei $g \in [1.5, 2]$ der Grenzwert von (x_n) . Mit den Grenzwertsätzen folgt nun

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x_n} = 1 + \frac{1}{g}$$

Diese Gleichung hat die positive Lösung $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

Alternativer Beweis. Wir zeigen per Induktion $|x_n - g| \leq \frac{1}{g^{n+1}}$, wobei g die positive Lösung der Gleichung $g = 1 + \frac{1}{g}$ bezeichnet.

Für $n = 0$ haben wir $|x_0 - g| = |1 - g| = \left| -\frac{1}{g} \right| \leq \frac{1}{g^1}$.

Sei nach Induktionsannahme $|x_{n-1} - g| \leq \frac{1}{g^n}$. Dann folgt wegen $x_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |x_n - g| &= \left| 1 + \frac{1}{x_{n-1}} - \left(1 + \frac{1}{g} \right) \right| = \left| \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{g} \right| \\ &= \left| \frac{g - x_{n-1}}{x_{n-1} \cdot g} \right| \leq \frac{1}{g} \cdot |x_{n-1} - g| \leq \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{g^n} = \frac{1}{g^{n+1}} \end{aligned}$$

Da $g > 1$, folgt $x_n \rightarrow g$. □

Aufgabe 4.9. Die **Fibonacci-Zahlen** f_n sind rekursiv definiert durch

$$f_0 := 0, \quad f_1 := 1, \quad f_{n+1} := f_n + f_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^\times$$

Man beweise, dass $\lim \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} \right) = g$, wobei g der Grenzwert aus Aufgabe 8 bezeichne.

Beweis. Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist monoton wachsend und für $n \geq 1$ gilt $f_n \geq 1$. Sei g der Grenzwert aus Aufgabe 8, also die positive Lösung der quadratischen Gleichung $g = 1 + \frac{1}{g}$. Sei $F_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$, $n \in \mathbb{N}^\times$. Wir wollen beweisen, dass die Folge $(F_n)_{n \geq 1}$ den Grenzwert g hat:

$$\begin{aligned} |F_n - g| &= \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} - g \right| = \left| \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} - g \right| = \left| 1 + \frac{1}{F_{n-1}} - \left(1 + \frac{1}{g}\right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{F_{n-1}} - \frac{1}{g} \right| = \left| \frac{g - F_{n-1}}{F_{n-1} \cdot g} \right| \leq \frac{1}{g} |F_{n-1} - g| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{g}\right)^{n-1} |F_1 - g| \end{aligned}$$

Da $0 < \frac{1}{g} = g - 1 < 1$ folgt $\left(\frac{1}{g}\right)^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und damit $\lim F_n = g$. □

Aufgabe 4.10. Es seien

$$x_0 := 5, \quad x_1 := 1, \quad x_{n+1} := \frac{3}{2}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^\times.$$

Man verifiziere, dass (x_n) konvergiert und bestimme $\lim x_n$.

Beweis. Für $n \geq 1$ gilt:

$$|x_n - x_{n-1}| = \left| \frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{1}{3}x_{n-2} - x_{n-1} \right| = \frac{1}{3}|x_{n-1} - x_{n-2}| = \dots = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \underbrace{|x_1 - x_0|}_{=4}$$

Und für $m \geq n \geq 1$ folgt mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} \pm \dots + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &= 4 \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} + 4 \left(\frac{1}{3}\right)^{m-2} + \dots + 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[1 + \frac{1}{3} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{m-n-1} \right] \\ &\leq 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{3}{2} = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Also bildet (x_n) eine Cauchyfolge und da \mathbb{R} vollständig ist, konvergiert sie.

Wir bestimmen nun ihren Grenzwert. Für $n \geq 1$ haben wir

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= \frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{1}{3}x_{n-2} - x_{n-1} = -\frac{1}{3}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 (x_{n-2} - x_{n-3}) \\ &= \dots = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} (x_1 - x_0) = (-4) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}x_n &= x_{n-1} + (-4) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\&= x_{n-2} + (-4) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + (-4) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\&= \dots = x_0 + (-4) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 5 - 4 \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^k .\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ liefert nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 5 - 4 \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 5 - 4 \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 5 - 4 \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}} = 5 - 4 \cdot \frac{3}{4} = 2$$

□

5. Uneigentliche Konvergenz

6. Vollständigkeit

7. Reihen

8. Absolute Konvergenz

9. Potenzreihen

Aufgabe 9.2. Die Potenzreihe $a = \sum_k (1+k)X^k$ hat Konvergenzradius 1 und für die durch a dargestellte Funktion \underline{a} gilt: $\underline{a}(z) = (1-z)^{-2}$ für $|z| < 1$.

Beweis. Sei $a_k = 1+k$. Dann ist $a = \sum_k a_k X^k$. Es gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1+k}{2+k} \right| = 1$$

Also existiert dieser Grenzwert und nach Satz 9.4 ist

$$\rho_a = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1$$

der Konvergenzradius von a .

Seien $b := \sum_k b_k X^k := \sum_k X^k$ und $c := \sum_k c_k X^k := \sum_k k X^k$. Diese Reihen haben ebenfalls Konvergenzradius 1. Also gilt für $z \in \mathbb{K}$, $|z| < 1$:

$$\underline{a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} k z^k = \underline{b}(z) + \underline{c}(z)$$

Wir wissen bereits, dass $\underline{b}(z) = \frac{1}{1-z}$. Wir müssen noch $\underline{c}(z)$ berechnen. Sei $s_n := \sum_{k=0}^n kz^k$.

$$\begin{aligned}
(1-z)s_n &= (1-z) \sum_{k=0}^n kz^k = \sum_{k=0}^n kz^k - kz^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^n kz^k - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)z^k = 0 + \sum_{k=1}^n (kz^k - (k-1)z^k) - nz^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} - nz^{n+1} = z \sum_{k=0}^{n-1} z^k - nz^{n+1} \\
&= z \left(\frac{1-z^n}{1-z} \right) - \frac{(1-z)nz^{n+1}}{1-z} = \frac{z - z^{n+1} - nz^{n+1} + nz^{n+2}}{1-z} \\
&= \frac{z - (n+1)z^{n+1} + nz^{n+2}}{1-z}
\end{aligned}$$

Also haben wir $s_n \rightarrow \frac{z}{(1-z)^2}$ für $n \rightarrow \infty$ und es folgt

$$\underline{c}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Somit haben wir

$$\underline{a}(z) = \underline{b}(z) + \underline{c}(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1-z+z}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

□

Aufgabe 9.10. Es sei $b = \sum b_k X^k \in \mathbb{C}[[X]]$ mit $(1 - X - X^2)b = 1 \in \mathbb{C}[[X]]$

(a) Man verifiziere, dass die Koeffizienten b_k die Rekursionsvorschrift

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad b_{k+1} = b_k + b_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^\times,$$

erfüllen, d.h. (b_k) ist die Folge der Fibonacci-Zahlen.

(b) Wie gross ist der Konvergenzradius von b ?

Beweis. (a) Sei $a := 1 - X - X^2$ und $c := 1 \in \mathbb{C}[[X]]$. Aus $1 = c_0 = a_0 b_0 = b_0$ folgt $b_0 = 1$ und aus $0 = c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1b_1 + (-1)b_0 = b_1 - 1$ folgt $b_1 = 1$. Schliesslich zeigt die Rechnung

$$\begin{aligned}
0 &= c_{k+1} = a_0 b_{k+1} + a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \underbrace{a_3 b_{k-2}}_{=0} + \dots + \underbrace{a_{k+1} b_0}_{=0} \\
&= b_{k+1} - b_k - b_{k-1},
\end{aligned}$$

dass $b_{k+1} = b_k + b_{k-1}$ für $n \in \mathbb{N}^\times$ gelten muss.

- (b) Die Folge (b_n) ist genau die Folge der Fibonacci-Zahlen. Nach Aufgabe 4.9 gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = g$, wobei g der goldene Schnitt bezeichnet. Also folgt mit Satz 9.4:

$$\rho_b = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{b_k}{b_{k+1}} \right| = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right|} = \frac{1}{g}$$

□

Kapitel III.

Stetige Funktionen

1. Stetigkeit

Aufgabe 1.11. Man betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

und setze für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x, x_0), \quad f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x_0, x)$$

Dann gelten:

- (a) f_1 und f_2 sind stetig.
- (b) f ist stetig in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und unstetig in $(0, 0)$.

Beweis. (a) Aus Symmetriegründen reicht es die Stetigkeit von f_1 zu beweisen. Nehmen wir zuerst $x_0 \neq 0$ an. Dann ist f_1 gegeben durch $f_1(x) = f(x, x_0) = \frac{xx_0}{x^2+x_0^2}$. Da der Nenner nie 0 ist, ist diese rationale Funktion auf ganz \mathbb{R} stetig. Im Fall $x_0 = 0$ ist $f_1(x) = \frac{0}{x^2} = 0$ für $x \neq 0$ und $f_1(0) = f(0, 0) = 0$, also ist f_1 die Nullfunktion und damit ebenfalls stetig auf \mathbb{R} . Es folgt, dass f_1 für jedes feste $x_0 \in \mathbb{R}$ auf ganz \mathbb{R} stetig ist.

- (b) Sei $(z_n) = ((x_n, y_n))$ eine Folge in \mathbb{R}^2 mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z = (x, y) \neq (0, 0)$. Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, also auch $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = x^2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^2 = y^2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = xy$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + y_n^2 = x^2 + y^2$. Damit folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

also ist f stetig in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Es sei nun $(z_n) = ((x_n, x_n))$ eine Folge in \mathbb{R}^2 mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = (0, 0)$. Dann ist

$$f(x_n, x_n) = \frac{x_n x_n}{x_n^2 + x_n^2} = \frac{x_n^2}{2x_n^2} = \frac{1}{2}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir haben $(x_n, x_n) \rightarrow (0, 0)$ aber $f(x_n, x_n) \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0$ für $n \rightarrow \infty$ und somit ist f in $(0, 0)$ nicht stetig. \square

Aufgabe 1.12. Man zeige, dass jede lineare Abbildung von \mathbb{K}^n nach \mathbb{K}^m Lipschitz-stetig ist.

Beweis. Sei $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ linear. Da f linear ist, gibt es eine Matrix $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m \times n}$ so, dass $f(x) = Ax$ für $x \in \mathbb{K}^n$. Seien $x, y \in \mathbb{K}^n$. Mit Satz II.3.12 und der Dreiecksungleichung folgt:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leq \sqrt{m} \|f(x) - f(y)\|_\infty = \sqrt{m} \|f(x - y)\|_\infty = \sqrt{m} \|A(x - y)\|_\infty \\ &= \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - y_j) \right| \\ &\leq \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j - y_j| \\ &\leq \sqrt{m} \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}| \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| \\ &\leq \sqrt{m} \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}| \cdot n \|x - y\|_\infty \\ &\leq \underbrace{n \sqrt{m} \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}|}_{=: \alpha} \|x - y\| \end{aligned}$$

Dies beweist die Lipschitz-Stetigkeit von f . \square

Aufgabe 1.14. Es seien $(E, (\cdot|\cdot))$ ein Innenproduktraum und $x_0 \in E$. Dann sind die Abbildungen

$$f : E \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto (x|x_0), \quad g : E \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto (x_0|x)$$

stetig.

Beweis. Sei $\tilde{x} \in E$, $\epsilon > 0$ und $\delta := \frac{\epsilon}{\|x_0\|}$. Für $x \in E$ mit $\|x - \tilde{x}\| < \delta$ folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\tilde{x})| &= |(x|x_0) - (\tilde{x}|x_0)| = |(x - \tilde{x}|x_0)| \\ &\leq \|x - \tilde{x}\| \|x_0\| < \delta \|x_0\| = \epsilon, \end{aligned}$$

also ist f stetig. Analog beweist man die Stetigkeit von g . \square

Aufgabe 1.16. Es sei $n \in \mathbb{N}^\times$ und $A = [a_{jk}] \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Die **Determinante** von A , $\det A$, ist gegeben durch

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign } \sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Man zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}, \quad A \mapsto \det A$$

stetig ist.

Beweis. Durch die Bijektion

$$\mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \cdot n}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \mapsto (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{nn})$$

lässt sich $\mathbb{K}^{n \times n}$ mit $\mathbb{K}^{n \cdot n}$ identifizieren.

Sei

$$pr_\sigma : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \mapsto (a_{1\sigma(1)}, \dots, a_{n\sigma(n)}) .$$

Diese Abbildung ist für jedes $\sigma \in S_n$ linear und somit nach Aufgabe 12 Lipschitz-stetig, also insbesondere stetig.

Sei weiter

$$(\cdot | \mathbf{1}) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \cdots x_n$$

Diese Abbildung ist nach Aufgabe 14 ebenfalls stetig.

Für $A = [a_{jk}] \in \mathbb{K}^{n \times n}$ haben wir nun

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign } \sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign } \sigma) (pr_\sigma(A) | \mathbf{1}) ,$$

und da Kompositionen sowie endliche Linearkombinationen von stetigen Abbildungen stetig sind, ist die Determinante stetig. \square

2. Topologische Grundbegriffe

Aufgabe 2.12. Es seien X und Y metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Man beweise:

$$f \text{ ist stetig} \quad \Leftrightarrow \quad f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}, \quad A \subset X$$

Beweis. „ \Rightarrow “ Sei f stetig, $A \subset X$ und $x \in \overline{A}$. Wir zeigen, dass $f(x) \in \overline{f(A)}$ gilt. Dazu muss nachgewiesen werden, dass $f(x)$ ein Berührungspunkt von $f(A)$ ist, d.h. dass jede Umgebung V von $f(x)$ in Y einen nicht leeren Durchschnitt mit $f(A)$ hat.

Sei V eine beliebige Umgebung von $f(x)$ in Y . Aufgrund der Stetigkeit von f finden wir eine Umgebung U von x in X so, dass $f(U) \subset V$ gilt. Da $x \in \overline{A}$, gibt es einen Punkt $y \in U$ mit $y \in A$, also $y \in A \cap U$. Es folgt $f(y) \in f(A \cap U) \subset f(A) \cap f(U) = f(A) \cap V$, also ist $f(A) \cap V$ nicht leer und es gilt $f(x) \in \overline{f(A)}$.

„ \Leftarrow “ Es gelte also $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ für jedes $A \subset X$. Sei $B \subset Y$ abgeschlossen in Y und sei $A := f^{-1}(B)$. Wir zeigen, dass A in X abgeschlossen ist, d.h. dass $A = \overline{A}$ gilt. Nach Definition von A ist $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B$. Sei $x \in \overline{A}$, dann folgt mit der Voraussetzung

$$f(x) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B ,$$

also ist $x \in f^{-1}(B) = A$.

□

3. Kompaktheit

4. Zusammenhang

5. Funktionen in \mathbb{R}

6. Die Exponentialfunktion und Verwandte

Kapitel IV.

Differentialrechnung in einer Variablen

1. Differenzierbarkeit
2. Mittelwertsätze und ihre Anwendung
3. Taylorsche Formeln
4. Iterationsverfahren

Kapitel V.

Funktionenfolgen

1. Gleichmässige Konvergenz
2. Stetigkeit und Differenzierbarkeit bei Funktionenfolgen
3. Analytische Funktionen
4. Polynomiale Approximation

Kapitel VI.

Integralrechnung in einer Variablen

1. Sprungstetige Funktionen
2. Stetige Erweiterungen
3. Das Cauchy-Riemannsche Integral
4. Eigenschaften des Integrals
5. Die Technik des Integrierens
6. Summen und Integrale
7. Fourierreihen
8. Uneigentliche Integrale
9. Die Gammafunktion

Kapitel VII.

Differentialrechnung in mehrerer Variabler

1. Stetige lineare Abbildungen
2. Differenzierbarkeit
3. Rechenregeln
4. Multilineare Abbildungen
5. Höhere Ableitungen
6. Nemytskiioperatoren und Variationsrechnung
7. Umkehrabbildungen
8. Implizite Funktionen
9. Mannigfaltigkeiten
10. Tangenten und Normalen

Kapitel VIII.

Kurvenintegrale

1. Kurven und ihre Länge
2. Kurven in \mathbb{R}^n
3. Pfaffsche Formen
4. Kurvenintegrale
5. Holomorphe Funktionen
6. Meromorphe Funktionen