Lösungen: Amann, Escher - Analysis

Kapitel I.

Grundlagen

Kapitel II.

Konvergenz

1. Konvergenz von Folgen

2. Das Rechnen mit Zahlenfolgen

3. Normierte Vektorräume

4. Monotone Folgen

5. Uneigentliche Konvergenz

6. Vollständigkeit

7. Reihen

8. Absolute Konvergenz

9. Potenzreihen

Aufgabe 9.2. Die Potenzreihe $a = \sum_k (1+k)X^k$ hat Konvergenzradius 1 und für die durch a dargestellte Funktion $\underline{a}$ gilt: $\underline{a}(z) = (1-z)^{-2}$ für $|z| < 1$.

Beweis. Sei $a_k = 1 + k$. Dann ist $a = \sum_k a_k X^k$. Es gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1+k}{2+k} \right| = 1$$

Also existiert dieser Grenzwert und nach Satz 9.4 ist

$$\rho_a = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1$$

der Konvergenzradius von a.
Seien $b := \sum_k b_k X^k := \sum_k X^k$ und $c := \sum_k c_k X^k := \sum_k kX^k$. Diese Reihen haben ebenfalls Konvergenzradius 1. Also gilt für $z \in \mathbb{K}$, $|z| < 1$:

$$\underline{a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} kz^k = \underline{b}(z) + \underline{c}(z)$$

Wir wissen bereits, dass $\underline{b}(z) = \frac{1}{1-z}$. Wir müssen noch $\underline{c}(z)$ berechnen. Sei $s_n := \sum_{k=0}^n kz^k$.

$$\begin{aligned}(1-z)s_n &= (1-z)\sum_{k=0}^{n} kz^k = \sum_{k=0}^{n} kz^k - kz^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} kz^k - \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)z^k = 0 + \sum_{k=1}^{n}(kz^k - (k-1)z^k) - nz^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} - nz^{n+1} = z\sum_{k=0}^{n-1} z^k - nz^{n+1} \\ &= z\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right) - \frac{(1-z)nz^{n+1}}{1-z} = \frac{z - z^{n+1} - nz^{n+1} + nz^{n+2}}{1-z} \\ &= \frac{z-(n+1)z^{n+1}+nz^{n+2}}{1-z}\end{aligned}$$

Also haben wir $s_n \to \frac{z}{(1-z)^2}$ für $n \to \infty$ und es folgt

$$\underline{c}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Somit haben wir

$$\underline{a}(z) = \underline{b}(z) + \underline{c}(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1-z+z}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

□

Kapitel III.

Stetige Funktionen

1. **Stetigkeit**
2. **Topologische Grundbegriffe**
3. **Kompaktheit**
4. **Zusammenhang**
5. **Funktionen in $\mathbb{R}$**
6. **Die Exponentialfunktion und Verwandte**

Kapitel IV.

Differentialrechnung in einer Variablen

1. **Differenzierbarkeit**
2. **Mittelwertsätze und ihre Anwendung**
3. **Taylorsche Formeln**
4. **Iterationsverfahren**

Kapitel V.

Funktionenfolgen

Kapitel VI.

Integralrechnung in einer Variablen

Kapitel VII.

Differentialrechnung in mehrerer Variabler

Kapitel VIII.

Kurvenintegrale