Lösungen: Amann, Escher - Analysis

Kapitel I.

Grundlagen

1. Logische Grundbegriffe
2. Mengen
3. Abbildungen
4. Relationen und Verknüpfungen
5. Die natürlichen Zahlen
6. Abzählbarkeit
7. Gruppen und Homomorphismen
8. Ringe, Körper und Polynome
9. Die rationionalen Zahlen
10. Die reellen Zahlen
11. Die komplexen Zahlen
12. Vektorräume, affine Räume und Algebren

Kapitel II.

Konvergenz

1. Konvergenz von Folgen

2. Das Rechnen mit Zahlenfolgen

3. Normierte Vektorräume

4. Monotone Folgen

Aufgabe 4.8. Es sei (x_n) rekursiv definiert durch

$$x_0 := 1, \quad x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige, dass die Folge (x_n) konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $x_n > 1$ für $n \geq 1$. Für $n = 1$ haben wir $x_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$. Nehmen wir an, es gilt $x_n > 1$, so folgt $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} > 1$. Unmittelbar aus der rekursiven Definition $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ und aus $x_n > 1$ für $n \geq 1$ folgt $x_n < 2$ für $n \geq 2$. Für $n \geq 1$ gilt sogar $x_n \in [1.5,\ 2]$, da

$$1.5 = 1 + \frac{1}{2} \leq x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \leq 1 + \frac{1}{1} = 2\ .$$

Insbesondere ist die Folge beschränkt.
Als nächstes zeigen wir, dass die Teilfolge (x_{2n}) monoton wachsend ist. Da $x_2 = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ist $x_2 > x_0 = 1$. Nun sei nach Induktionsannahme $x_{2n} \geq x_{2(n-1)}$.

$$x_{2(n+1)} - x_{2n} = 1 + \frac{1}{x_{2n+1}} - \left(1 + \frac{1}{x_{2n-1}}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2n}}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2(n-1)}}} = \frac{x_{2n}}{x_{2n} + 1} - \frac{x_{2(n-1)}}{x_{2(n-1)} + 1}$$

$$= \frac{x_{2n}(x_{2(n-1)} + 1) - x_{2(n-1)}(x_{2n} + 1)}{(x_{2n} + 1)(x_{2(n-1)} + 1)} = \frac{x_{2n} - x_{2(n-1)}}{(x_{2n} + 1)(x_{2(n-1)} + 1)} \geq 0$$

Also ist (x_{2n}) eine konvergente Teilfolge von (x_n).

Wir weisen nun nach, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist. Sei dazu $n \geq 1$ beliebig.

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= \left|1 + \frac{1}{x_n} - \left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right)\right| = \left|\frac{x_{n-1} - x_n}{x_n \cdot x_{n-1}}\right| \leq \frac{1}{2}|x_{n-1} - x_n| \\ &\leq \ldots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot |x_2 - x_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Für $m \geq n \geq 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} \pm \ldots - x_n| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Somit finden wir zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|x_m - x_n| < \epsilon, \quad \text{für } m \geq n \geq N \ ,$$

und (x_n) ist eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge besitzt, also selbst konvergent.
Sei $g \in [1.5,\ 2]$ der Grenzwert von (x_n). Mit den Grenzwertsätzen folgt nun

$$g = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{x_n} = 1 + \frac{1}{g}$$

Diese Gleichung hat die positive Lösung $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

Alternativer Beweis. Wir zeigen per Induktion $|x_n - g| \leq \frac{1}{g^{n+1}}$, wobei g die positive Lösung der Gleichung $g = 1 + \frac{1}{g}$ bezeichnet.
Für $n = 0$ haben wir $|x_0 - g| = |1 - g| = \left|-\frac{1}{g}\right| \leq \frac{1}{g^1}$.
Sei nach Induktionsannahme $|x_{n-1} - g| \leq \frac{1}{g^n}$. Dann folgt wegen $x_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |x_n - g| &= \left|1 + \frac{1}{x_{n-1}} - \left(1 + \frac{1}{g}\right)\right| = \left|\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{g}\right| \\ &= \left|\frac{g - x_{n-1}}{x_{n-1} \cdot g}\right| \leq \frac{1}{g} \cdot |x_{n-1} - g| \leq \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{g^n} = \frac{1}{g^{n+1}} \end{aligned}$$

Da $g > 1$, folgt $x_n \to g$. □

Aufgabe 4.9. Die **Fibonacci-Zahlen** f_n sind rekursiv definiert durch

$$f_0 := 0 \ , \quad f_1 := 1 \ , \quad f_{n+1} := f_n + f_{n-1} \ , \ n \in \mathbb{N}^\times$$

Man beweise, dass $\lim \left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right) = g$, wobei g der Grenzwert aus Aufgabe 8 bezeichne.

Beweis. Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist monoton wachsend und für $n \geq 1$ gilt $f_n \geq 1$. Sei g der Grenzwert aus Aufgabe 8, also die positive Lösung der quadratischen Gleichung $g = 1 + \frac{1}{g}$. Sei $F_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$, $n \in \mathbb{N}^\times$. Wir wollen beweisen, dass die Folge $(F_n)_{n\geq 1}$ den Grenzwert g hat:

$$\begin{aligned}|F_n - g| &= \left|\frac{f_{n+1}}{f_n} - g\right| = \left|\frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} - g\right| = \left|1 + \frac{1}{F_{n-1}} - \left(1 + \frac{1}{g}\right)\right| \\ &= \left|\frac{1}{F_{n-1}} - \frac{1}{g}\right| = \left|\frac{g - F_{n-1}}{F_{n-1} \cdot g}\right| \leq \frac{1}{g}|F_{n-1} - g| \leq \ldots \leq \left(\frac{1}{g}\right)^{n-1} |F_1 - g|\end{aligned}$$

Da $0 < \frac{1}{g} = g - 1 < 1$ folgt $\left(\frac{1}{g}\right)^n \to 0$ für $n \to \infty$ und damit $\lim F_n = g$. □

5. Uneigentliche Konvergenz

6. Vollständigkeit

7. Reihen

8. Absolute Konvergenz

9. Potenzreihen

Aufgabe 9.2. Die Potenzreihe $a = \sum_k (1+k)X^k$ hat Konvergenzradius 1 und für die durch a dargestellte Funktion $\underline{a}$ gilt: $\underline{a}(z) = (1-z)^{-2}$ für $|z| < 1$.

Beweis. Sei $a_k = 1 + k$. Dann ist $a = \sum_k a_k X^k$. Es gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1+k}{2+k}\right| = 1$$

Also existiert dieser Grenzwert und nach Satz 9.4 ist

$$\rho_a = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = 1$$

der Konvergenzradius von a.
Seien $b := \sum_k b_k X^k := \sum_k X^k$ und $c := \sum_k c_k X^k := \sum_k kX^k$. Diese Reihen haben ebenfalls Konvergenzradius 1. Also gilt für $z \in \mathbb{K}$, $|z| < 1$:

$$\underline{a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} kz^k = \underline{b}(z) + \underline{c}(z)$$

Wir wissen bereits, dass $\underline{b}(z) = \frac{1}{1-z}$. Wir müssen noch $\underline{c}(z)$ berechnen. Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} kz^k$.

$$
\begin{aligned}
(1-z)s_n &= (1-z)\sum_{k=0}^{n} kz^k = \sum_{k=0}^{n} kz^k - kz^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} kz^k - \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)z^k = 0 + \sum_{k=1}^{n}(kz^k - (k-1)z^k) - nz^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} - nz^{n+1} = z\sum_{k=0}^{n-1} z^k - nz^{n+1} \\
&= z\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right) - \frac{(1-z)nz^{n+1}}{1-z} = \frac{z - z^{n+1} - nz^{n+1} + nz^{n+2}}{1-z} \\
&= \frac{z-(n+1)z^{n+1} + nz^{n+2}}{1-z}
\end{aligned}
$$

Also haben wir $s_n \to \frac{z}{(1-z)^2}$ für $n \to \infty$ und es folgt

$$\underline{c}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Somit haben wir

$$\underline{a}(z) = \underline{b}(z) + \underline{c}(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1-z+z}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

$\square$

Kapitel III.

Stetige Funktionen

Kapitel IV.

Differentialrechnung in einer Variablen

1. Differenzierbarkeit

2. Mittelwertsätze und ihre Anwendung

3. Taylorsche Formeln

4. Iterationsverfahren

Kapitel V.

Funktionenfolgen

1. Gleichmässige Konvergenz
2. Stetigkeit und Differenzierbarkeit bei Funktionenfolgen
3. Analytische Funktionen
4. Polynomiale Approximation

Kapitel VI.

Integralrechnung in einer Variablen

1. Sprungstetige Funktionen
2. Stetige Erweiterungen
3. Das Cauchy-Riemannsche Integral
4. Eigenschaften des Integrals
5. Die Technik des Integrierens
6. Summen und Integrale
7. Fourierreihen
8. Uneigentliche Integrale
9. Die Gammafunktion

Kapitel VII.

Differentialrechnung in mehrerer Variabler

Kapitel VIII.

Kurvenintegrale