Lösungen: Amann, Escher - Analysis

Kapitel I.

Grundlagen

1. Logische Grundbegriffe

2. Mengen

3. Abbildungen

4. Relationen und Verknüpfungen

5. Die natürlichen Zahlen

Aufgabe 5.2. Folgende Identitäten sind durch vollständige Induktion zu verifizieren:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$

Beweis. (a) Für $n = 0$ ist die Behauptung klar. Nach Induktionsannahme gelte

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2} \ .$$

Also folgt

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n-1} k + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

(b) Für $n = 0$ ist die Behauptung wieder klar. Sei nach Induktionsannahme

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} + n^2 &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{6n^2}{6} = \frac{(n^2-n)(2n-1)+6n^2}{6} \\ &= \frac{2n^3-n^2-2n^2+n+6n^2}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .\end{aligned}$$

□

Aufgabe 5.5. (a) Man verifiziere, dass für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ gilt:

$$[m!(n-m)!] \mid n!$$

(b) Für $m, n \in \mathbb{N}$ werden die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{m} \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\binom{n}{m} := \begin{cases} \frac{n!}{m!(n-m)!} \ , & n \leq m \\ 0 \ , & m > n \end{cases}$$

Man beweise folgende Rechenregeln:

(i) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$

(ii) $\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}, \ 1 \leq m \leq n$

(iii) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(iv) $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$

Beweis. (a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$.

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

Im Zähler haben wir m Faktoren. Also gibt es einen Faktor $(n - i_1)$, so dass $m \mid (n-i_1)$. Setzen wir dieses Verfahren fort, so finden wir $m! \mid n(n-1)\cdots(n-m+1)$, also $m!(n-m)! \mid n!$.

(b) (i)

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\,(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \binom{n}{m}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!} \\ &= \frac{n! \cdot m}{m!(n-m+1)!} + \frac{n! \cdot (n-m+1)}{m!(n-m+1)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{m!(n-m+1)!} = \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} = \binom{n+1}{m}\end{aligned}$$

(iii) Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion über n. Für $n = 0$ haben wir

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1 = 2^0$$

Nehmen wir an, es gelte $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$, dann folgt mit (ii):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k} \\
&= 1 + 2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n
\end{aligned}$$

(iv) Wiederum verwenden wir Induktion über n. Für $n = 0$ haben wir $\binom{0}{0} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$. Sei nach Induktionsannahme $\sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m}{n+1}$. Dann folgt

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k}{n} + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{n+1} + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+}{n+1}.$$

$\square$

6. Abzählbarkeit

7. Gruppen und Homomorphismen

8. Ringe, Körper und Polynome

Aufgabe 8.1. Es seien a und b kommutierende Elemente eines Ringes mit Eins und $n \in \mathbb{N}$. Man beweise:

(a) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{j=0}^{n} a^j b^{n-j}$

(b) $a^{n+1} - 1 = (a-1) \sum_{j=0}^{n} a^j$

Beweis. (a)

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{j=0}^{n} a^j b^{n-1} &= \sum_{j=0}^{n} a^{j+1} b^{n-j} - \sum_{j=0}^{n} a^j b^{n+1-j} \\ &= a^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} a^{j+1} b^{n-j} - \sum_{j=1}^{n} a^j b^{n+1-j} - b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \left(\sum_{j=0}^{n-1} a^{j+1} b^{n-j} - \sum_{j=0}^{n-1} a^{j+1} b^{n-j}\right) - b^{n+1} \\ &= a^{n+1} - b^{n+1}\end{aligned}$$

(b) Setze $b = 1$ in (a).

□

Aufgabe 8.3. Sei K ein Körper. Dann ist $K[X]$ nullteilerfrei.

Beweis. Angenommen, es existieren $0 \neq p = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \in K[X]$ und $0 \neq q = \sum_{k=0}^{m} q_k X^k \in K[X]$ mit $pq = 0$, d.h.

$$pq = \left(\sum_{k=0}^{n} p_k X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{m} q_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n+m} \underbrace{\left(\sum_{\ell=0}^{k} p_\ell q_{k-\ell}\right)}_{(pq)_k} X^k = 0$$

Seien i und j die kleinsten Indizes mit $p_i \neq 0$ und $q_j \neq 0$. Dann ist aber

$$\begin{aligned}(pq)_{i+j} &= \sum_{\ell=0}^{i+j} p_\ell q_{(i+j)-\ell} \\ &= \underbrace{p_0}_{=0} q_{i+j} + \ldots + \underbrace{p_{i-1}}_{=0} q_{j+1} + \underbrace{p_i q_j}_{\neq 0} + p_{i+1} \underbrace{q_{j-1}}_{=0} + \ldots + p_n \underbrace{q_{j-1}}_{=0} \neq 0\end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

9. Die rationionalen Zahlen

10. Die reellen Zahlen

11. Die komplexen Zahlen

12. Vektorräume, affine Räume und Algebren

Kapitel II.

Konvergenz

1. Konvergenz von Folgen

2. Das Rechnen mit Zahlenfolgen

3. Normierte Vektorräume

4. Monotone Folgen

Aufgabe 4.4. Für $a \in (0,\infty)$ definiere man die reelle Folge (x_n) rekursiv durch $x_0 \geq a$ und

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \ , \ n \in \mathbb{N}$$

Man beweise, dass (x_n) monoton fallend gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Beweis. Man weist einfach nach, dass $x_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2}\right) + a = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2 + a \geq a \end{aligned}$$

Wir weisen nach, dass (x_n) monoton fallend ist:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{a}{2x_n} - \frac{1}{2}x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0$$

Also ist die Folge (x_n) nach unten beschränkt, monoton fallend und konvergiert somit. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\lim x_n = \sqrt{a}$. Aus

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n - \sqrt{a} + \frac{a}{x_n} - \sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)(x_n - \sqrt{a})$$

folgt

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| = \frac{1}{2}\underbrace{\left|1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right|}_{\leq 1}|x_n - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{a}| \leq \ldots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|x_0 - \sqrt{a}| \ ,$$

woraus folgt, dass $x_n \to \sqrt{a}$ für $n \to \infty$.

$\square$

Aufgabe 4.7. (a) Man beweise folgende Fehlerabschätzung für $n \in \mathbb{N}^\times$:

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!}$$

(b) Man beweise, dass e eine irrationale Zahl ist.

Beweis.

(a) Da $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist die erste Ungleichung klar.
Sei $y_m := \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k!}$. Es gilt $y_m \to e - \sum_{k=0}^{n}$ für $m \to \infty$.

$$\begin{aligned} y_m = \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}\right] \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{m-2}\right] \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{nn!} \end{aligned}$$

Also gilt auch die zweite Ungleichung.

(b) Angenommen e ist rational, dann gibt es $p,\ n \in \mathbb{N}^\times$ mit $e = \frac{p}{n}$. Nach (a) gilt dann:

$$0 < \frac{p}{n} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!}$$

Also ist

$$0 < \underbrace{n!p - n\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{Z}} < 1\ .$$

Das ist aber nicht möglich, da es keine ganze Zahl zwischen 0 und 1 gibt. $\square$

Aufgabe 4.8. Es sei (x_n) rekursiv definiert durch

$$x_0 := 1, \quad x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige, dass die Folge (x_n) konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $x_n > 1$ für $n \geq 1$. Für $n = 1$ haben wir $x_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$. Nehmen wir an, es gilt $x_n > 1$, so folgt $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} > 1$. Unmittelbar aus der rekursiven Definition $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ und aus $x_n > 1$ für $n \geq 1$ folgt $x_n < 2$ für $n \geq 2$. Für $n \geq 1$ gilt sogar $x_n \in [1.5,\ 2]$, da

$$1.5 = 1 + \frac{1}{2} \leq x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \leq 1 + \frac{1}{1} = 2\ .$$

Insbesondere ist die Folge beschränkt.
Als nächstes zeigen wir, dass die Teilfolge (x_{2n}) monoton wachsend ist. Da $x_2 = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ist $x_2 > x_0 = 1$. Nun sei nach Induktionsannahme $x_{2n} \geq x_{2(n-1)}$.

$$\begin{aligned} x_{2(n+1)} - x_{2n} &= 1 + \frac{1}{x_{2n+1}} - \left(1 + \frac{1}{x_{2n-1}}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2n}}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2(n-1)}}} = \frac{x_{2n}}{x_{2n}+1} - \frac{x_{2(n-1)}}{x_{2(n-1)}+1} \\ &= \frac{x_{2n}(x_{2(n-1)}+1) - x_{2(n-1)}(x_{2n}+1)}{(x_{2n}+1)(x_{2(n-1)}+1)} = \frac{x_{2n} - x_{2(n-1)}}{(x_{2n}+1)(x_{2(n-1)}+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

Also ist (x_{2n}) eine konvergente Teilfolge von (x_n).
Wir weisen nun nach, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist. Sei dazu $n \geq 1$ beliebig.

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= \left|1 + \frac{1}{x_n} - \left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right)\right| = \left|\frac{x_{n-1} - x_n}{x_n \cdot x_{n-1}}\right| \leq \frac{1}{2}|x_{n-1} - x_n| \\ &\leq \ldots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot |x_2 - x_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Für $m \geq n \geq 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} \pm \ldots - x_n| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Somit finden wir zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|x_m - x_n| < \epsilon, \quad \text{für } m \geq n \geq N\ ,$$

und (x_n) ist eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge besitzt, also selbst konvergent.
Sei $g \in [1.5,\ 2]$ der Grenzwert von (x_n). Mit den Grenzwertsätzen folgt nun

$$g = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{x_n} = 1 + \frac{1}{g}$$

Diese Gleichung hat die positive Lösung $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

Alternativer Beweis. Wir zeigen per Induktion $|x_n - g| \leq \frac{1}{g^{n+1}}$, wobei g die positive Lösung der Gleichung $g = 1 + \frac{1}{g}$ bezeichnet.
Für $n = 0$ haben wir $|x_0 - g| = |1 - g| = \left|-\frac{1}{g}\right| \leq \frac{1}{g^1}$.
Sei nach Induktionsannahme $|x_{n-1} - g| \leq \frac{1}{g^n}$. Dann folgt wegen $x_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |x_n - g| &= \left|1 + \frac{1}{x_{n-1}} - \left(1 + \frac{1}{g}\right)\right| = \left|\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{g}\right| \\ &= \left|\frac{g - x_{n-1}}{x_{n-1} \cdot g}\right| \leq \frac{1}{g} \cdot |x_{n-1} - g| \leq \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{g^n} = \frac{1}{g^{n+1}} \end{aligned}$$

Da $g > 1$, folgt $x_n \to g$. □

Aufgabe 4.9. Die **Fibonacci-Zahlen** f_n sind rekursiv definiert durch

$$f_0 := 0 \ , \quad f_1 := 1 \ , \quad f_{n+1} := f_n + f_{n-1} \ , \ n \in \mathbb{N}^\times$$

Man beweise, dass $\lim \left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right) = g$, wobei g der Grenzwert aus Aufgabe 8 bezeichne.

Beweis. Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist monoton wachsend und für $n \geq 1$ gilt $f_n \geq 1$. Sei g der Grenzwert aus Aufgabe 8, also die positive Lösung der quadratischen Gleichung $g = 1 + \frac{1}{g}$. Sei $F_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$, $n \in \mathbb{N}^\times$. Wir wollen beweisen, dass die Folge $(F_n)_{n \geq 1}$ den Grenzwert g hat:

$$\begin{aligned} |F_n - g| &= \left|\frac{f_{n+1}}{f_n} - g\right| = \left|\frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} - g\right| = \left|1 + \frac{1}{F_{n-1}} - \left(1 + \frac{1}{g}\right)\right| \\ &= \left|\frac{1}{F_{n-1}} - \frac{1}{g}\right| = \left|\frac{g - F_{n-1}}{F_{n-1} \cdot g}\right| \leq \frac{1}{g}|F_{n-1} - g| \leq \ldots \leq \left(\frac{1}{g}\right)^{n-1} |F_1 - g| \end{aligned}$$

Da $0 < \frac{1}{g} = g - 1 < 1$ folgt $\left(\frac{1}{g}\right)^n \to 0$ für $n \to \infty$ und damit $\lim F_n = g$. □

Aufgabe 4.10. Es seien

$$x_0 := 5 \ , \quad x_1 := 1 \ , \quad x_{n+1} := \frac{3}{2}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1} \ , \ n \in \mathbb{N}^\times \ .$$

Man verifiziere, dass (x_n) konvergiert und bestimme $\lim x_n$.

Beweis. Für $n \geq 1$ gilt:

$$|x_n - x_{n-1}| = \left|\frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{1}{3}x_{n-2} - x_{n-1}\right| = \frac{1}{3}|x_{n-1} - x_{n-2}| = \ldots = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \underbrace{|x_1 - x_0|}_{=4}$$

Und für $m \geq n \geq 1$ folgt mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} \pm \ldots + x_{n+1} - x_n| \\
&\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \\
&= 4\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} + 4\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2} + \ldots + 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \\
&= 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left[1 + \frac{1}{3} + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{m-n-1}\right] \\
&\leq 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k} = 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\cdot\frac{3}{2} = 6\left(\frac{1}{3}\right)^{n}
\end{aligned}$$

Also bildet (x_n) eine Cauchyfolge und da $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert sie.
Wir bestimmen nun ihren Grenzwert. Für $n \geq 1$ haben wir

$$\begin{aligned}
x_n - x_{n-1} = \frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{1}{3}x_{n-2} - x_{n-1} = -\frac{1}{3}\left(x_{n-1} - x_{n-2}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2}\left(x_{n-2} - x_{n-3}\right) \\
= \ldots = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(x_1 - x_0\right) = (-4)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad .
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
x_n &= x_{n-1} + (-4)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= x_{n-2} + (-4)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + (-4)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \ldots = x_0 + (-4)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k} = 5 - 4\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k} \quad .
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert nun

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 5 - 4\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k} = 5 - 4\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = 5 - 4\cdot\frac{1}{\frac{4}{3}} = 5 - 4\cdot\frac{3}{4} = 2$$

$\square$

5. Uneigentliche Konvergenz

6. Vollständigkeit

7. Reihen

8. Absolute Konvergenz

9. Potenzreihen

Aufgabe 9.2. Die Potenzreihe $a = \sum_k (1+k)X^k$ hat Konvergenzradius 1 und für die durch a dargestellte Funktion $\underline{a}$ gilt: $\underline{a}(z) = (1-z)^{-2}$ für $|z| < 1$.

Beweis. Sei $a_k = 1 + k$. Dann ist $a = \sum_k a_k X^k$. Es gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{1+k}{2+k} \right| = 1$$

Also existiert dieser Grenzwert und nach Satz 9.4 ist

$$\rho_a = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1$$

der Konvergenzradius von a.
Seien $b := \sum_k b_k X^k := \sum_k X^k$ und $c := \sum_k c_k X^k := \sum_k kX^k$. Diese Reihen haben ebenfalls Konvergenzradius 1. Also gilt für $z \in \mathbb{K}$, $|z| < 1$:

$$\underline{a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} kz^k = \underline{b}(z) + \underline{c}(z)$$

Wir wissen bereits, dass $\underline{b}(z) = \frac{1}{1-z}$. Wir müssen noch $\underline{c}(z)$ berechnen. Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} kz^k$.

$$\begin{aligned}
(1-z)s_n &= (1-z)\sum_{k=0}^{n} kz^k = \sum_{k=0}^{n} kz^k - kz^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} kz^k - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)z^k = 0 + \sum_{k=1}^{n} (kz^k - (k-1)z^k) - nz^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} - nz^{n+1} = z\sum_{k=0}^{n-1} z^k - nz^{n+1} \\
&= z\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right) - \frac{(1-z)nz^{n+1}}{1-z} = \frac{z - z^{n+1} - nz^{n+1} + nz^{n+2}}{1-z} \\
&= \frac{z - (n+1)z^{n+1} + nz^{n+2}}{1-z}
\end{aligned}$$

Also haben wir $s_n \to \frac{z}{(1-z)^2}$ für $n \to \infty$ und es folgt

$$\underline{c}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k z^k = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Somit haben wir

$$\underline{a}(z) = \underline{b}(z) + \underline{c}(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1-z+z}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

$\square$

Kapitel III.

Stetige Funktionen

Kapitel IV.

Differentialrechnung in einer Variablen

Kapitel V.

Funktionenfolgen

1. **Gleichmässige Konvergenz**
2. **Stetigkeit und Differenzierbarkeit bei Funktionenfolgen**
3. **Analytische Funktionen**
4. **Polynomiale Approximation**

Kapitel VI.

Integralrechnung in einer Variablen

Kapitel VII.

Differentialrechnung in mehrerer Variabler

Kapitel VIII.

Kurvenintegrale