

Lösungen: Amann, Escher - Analysis

Kapitel I.

Grundlagen

1. Logische Grundbegriffe
2. Mengen
3. Abbildungen
4. Relationen und Verknüpfungen
5. Die natürlichen Zahlen

Aufgabe 5.2. Folgende Identitäten sind durch vollständige Induktion zu verifizieren:

$$(a) \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$
$$(b) \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Beweis. (a) Für $n = 0$ ist die Behauptung klar. Nach Induktionsannahme gelte

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Also folgt

$$\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=0}^{n-1} k + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) Für $n = 0$ ist die Behauptung wieder klar. Sei nach Induktionsannahme

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n k^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} + n^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{6n^2}{6} = \frac{(n^2-n)(2n-1) + 6n^2}{6} \\
&= \frac{2n^3 - n^2 - 2n^2 + n + 6n^2}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 5.5. (a) Man verifiziere, dass für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ gilt:

$$[m!(n-m)!] \mid n!$$

(b) Für $m, n \in \mathbb{N}$ werden die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{m} \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\binom{n}{m} := \begin{cases} \frac{n!}{m!(n-m)!}, & n \leq m \\ 0, & m > n \end{cases}$$

Man beweise folgende Rechenregeln:

- (i) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$
- (ii) $\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}$, $1 \leq m \leq n$
- (iii) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
- (iv) $\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$

Beweis. (a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$.

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-m+1)}{m!}$$

Im Zähler haben wir m Faktoren. Also gibt es einen Faktor $(n-i_1)$, so dass $m \mid (n-i_1)$. Setzen wir dieses Verfahren fort, so finden wir $m! \mid n(n-1) \cdots (n-m+1)$, also $m!(n-m)! \mid n!$.

(b) (i)

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \binom{n}{m}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!} \\
&= \frac{n! \cdot m}{m!(n-m+1)!} + \frac{n! \cdot (n-m+1)}{m!(n-m+1)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{m!(n-m+1)!} = \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} = \binom{n+1}{m}
\end{aligned}$$

- (iii) Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion über n . Für $n = 0$ haben wir

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1 = 2^0$$

Nehmen wir an, es gelte $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$, dann folgt mit (ii):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} &= 1 + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k} \\ &= 1 + 2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n \end{aligned}$$

- (iv) Wiederum verwenden wir Induktion über n . Für $n = 0$ haben wir $\binom{0}{0} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$. Sei nach Induktionsannahme $\sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m}{n+1}$. Dann folgt

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k}{n} + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{n+1} + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}.$$

□

6. Abzählbarkeit

7. Gruppen und Homomorphismen

8. Ringe, Körper und Polynome

Aufgabe 8.1. Es seien a und b kommutierende Elemente eines Ringes mit Eins und $n \in \mathbb{N}$. Man beweise:

(a) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{j=0}^n a^j b^{n-j}$

(b) $a^{n+1} - 1 = (a - 1) \sum_{j=0}^n a^j$

Beweis. (a)

$$\begin{aligned}
 (a-b) \sum_{j=0}^n a^j b^{n-1} &= \sum_{j=0}^n a^{j+1} b^{n-j} - \sum_{j=0}^n a^j b^{n+1-j} \\
 &= a^{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1} a^{j+1} b^{n-j} - \sum_{j=1}^n a^j b^{n+1-j} - b^{n+1} \\
 &= a^{n+1} + \left(\sum_{j=0}^{n-1} a^{j+1} b^{n-j} - \sum_{j=0}^{n-1} a^{j+1} b^{n-j} \right) - b^{n+1} \\
 &= a^{n+1} - b^{n+1}
 \end{aligned}$$

(b) Setze $b = 1$ in (a).

□

Aufgabe 8.3. Sei K ein Körper. Dann ist $K[X]$ nullteilerfrei.

Beweis. Angenommen, es existieren $0 \neq p = \sum_{k=0}^n p_k X^k \in K[X]$ und $0 \neq q = \sum_{k=0}^m q_k X^k \in K[X]$ mit $pq = 0$, d.h.

$$pq = \left(\sum_{k=0}^n p_k X^k \right) \left(\sum_{k=0}^m q_k X^k \right) = \sum_{k=0}^{n+m} \underbrace{\left(\sum_{\ell=0}^k p_\ell q_{k-\ell} \right)}_{(pq)_k} X^k = 0$$

Seien i und j die kleinsten Indizes mit $p_i \neq 0$ und $q_j \neq 0$. Dann ist aber

$$\begin{aligned}
 (pq)_{i+j} &= \sum_{\ell=0}^{i+j} p_\ell q_{(i+j)-\ell} \\
 &= \underbrace{p_0}_{=0} q_{i+j} + \dots + \underbrace{p_{i-1}}_{=0} q_{j+1} + \underbrace{p_i}_{\neq 0} q_j + \underbrace{p_{i+1}}_{=0} q_{j-1} + \dots + p_n \underbrace{q_0}_{=0} \neq 0
 \end{aligned}$$

ein Widerspruch.

□

9. Die rationalen Zahlen

10. Die reellen Zahlen

Aufgabe 10.6. Man beweise die *Bernoullische Ungleichung*: Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx .$$

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion. Für $n = 0$ ist $(1+x)^0 = 1 \geq 1 = 1+0 \cdot x$. Sei nach Induktionsannahme $(1+x)^{n-1} \geq 1 + (n-1)x$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n-1} &= (1+x)(1+x)^{n-1} \geq (1+x)(1+(n-1)x) \\ &= 1 + \underbrace{(n-1)x + x}_{=nx} + \underbrace{(n-1)x^2}_{\geq 0} \geq 1 + nx \end{aligned}$$

□

Aufgabe 10.10. Es seien $n \in \mathbb{N}^\times$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in [\mathbb{R}^+]^n$. Dann heisst $g(x) := \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j}$ bzw. $a(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ **geometrisches** bzw. **arithmetisches Mittel** der x_1, \dots, x_n . Zu beweisen ist die *Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel*, d.h. $g(x) \leq a(x)$.

Beweis. Wir beweisen die Ungleichung per vollständige Induktion über n . Für $n = 1$ gilt $g(x) = x_1 \leq \frac{1}{1}x_1 = a(x)$.

Sei die Behauptung wahr für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir können $x_i > 0$ annehmen für $i = 1, \dots, n+1$, da sonst die Behauptung trivial ist. Seien also $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}_{>0}$ und ohne Einschränkung sei $x_{n+1} \geq x_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dann ist

$$a(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \frac{nx_{n+1}}{n} = x_{n+1}.$$

Also ist

$$y := \frac{x_{n+1} - a(x_1, \dots, x_n)}{(n+1)a(x_1, \dots, x_n)} \geq 0$$

und wegen

$$\begin{aligned} 1 + y &= \frac{(n+1)a(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1} - a(x_1, \dots, x_n)}{(n+1)a(x_1, \dots, x_n)} = \frac{na(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}}{(n+1)a(x_1, \dots, x_n)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{x_{n+1}}{(n+1)a(x_1, \dots, x_n)} \end{aligned}$$

folgt aus der Bernoulli-Ungleichung

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{(n+1)a(x_1, \dots, x_n)} \right)^{n+1} = (1+y)^{n+1} \geq 1 + (n+1)y = \frac{x_{n+1}}{a(x_1, \dots, x_n)}.$$

Nun folgt mit der Induktionsannahme die Behauptung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} x_j &\geq a(x_1, \dots, x_n)^{n+1} \frac{x_{n+1}}{a(x_1, \dots, x_n)} = a(x_1, \dots, x_n)^n x_{n+1} \\ &\geq g(x_1, \dots, x_n)^n x_{n+1} = \prod_{j=1}^{n+1} x_j \end{aligned}$$

□

Aufgabe 10.11. Für $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ sei $x \bullet y := \sum_{j=1}^n x_j y_j$. Man beweise folgende Ungleichung zwischen dem **gewichteten geometrischen** und dem **gewichteten arithmetischen Mittel**:

$$\sqrt[n]{x^\alpha} \leq \frac{x \bullet \alpha}{|\alpha|}, \quad x \in [\mathbb{R}^+]^n, \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Beweis. Sei $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $m := |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in [\mathbb{R}^+]$. Es folgt mit der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel:

$$\sqrt[n]{x^\alpha} = \sqrt[m]{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}} \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = \frac{x \bullet \alpha}{|\alpha|}$$

□

Aufgabe 10.16. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei I_n ein nichtleeres abgeschlossenes Intervall in \mathbb{R} . Die Familie $\{I_n ; n \in \mathbb{N}\}$ heiße **Intervallschachtelung**, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (a) $I_{n+1} \subset I_n$ für $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \epsilon$.

Man beweise:

- (i) Zu jeder Intervallschachtelung $\{I_n ; n \in \mathbb{N}\}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in \bigcap_n I_n$.
- (ii) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Intervallschachtelung $\{I_n ; n \in \mathbb{N}\}$ mit rationalen Endpunkten und $\{x\} = \bigcap_n I_n$.

Beweis. (i) Da die $I_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ ist $\bigcap_n I_n \neq \emptyset$.

Angenommen es gäbe zwei verschiedene Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y \in \bigcap_n I_n$. Sei $\epsilon := \frac{|x-y|}{2}$. Nach (b) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|I_N| < \epsilon = \frac{|x-y|}{2}.$$

Da $x, y \in I_N$ gilt daher

$$|x-y| \leq |I_N| < \frac{|x-y|}{2},$$

ein Widerspruch.

- (ii) Es ist klar, dass es eine Intervallschachtelung gibt mit $\{x\} = \bigcap_n I_n$, man nehme z.B. $I_n := [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$. Wir müssen zeigen, dass wir diese so wählen können, dass alle Endpunkte der Intervalle I_n rational sind. Sei $\{I_n = [a_n, b_n] ; n \in \mathbb{N}\}$ eine Intervallschachtelung mit $\{x\} = \bigcap_n I_n$. Nach Satz 10.8 gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{a}_n \in \mathbb{Q}$ und ein $\tilde{b}_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_n < \tilde{a}_n < x$ und $x < \tilde{b}_n < b_n$. Nun haben wir mit $\tilde{I}_n := [\tilde{a}_n, \tilde{b}_n] ; n \in \mathbb{N}$ eine Intervallschachtelung mit rationalen Endpunkten gefunden, welche $\{x\} = \bigcap_n \tilde{I}_n$ erfüllt.

□

11. Die komplexen Zahlen

12. Vektorräume, affine Räume und Algebren

Kapitel II.

Konvergenz

1. Konvergenz von Folgen
2. Das Rechnen mit Zahlenfolgen
3. Normierte Vektorräume
4. Monotone Folgen

Aufgabe 4.4. Für $a \in (0, \infty)$ definiere man die reelle Folge (x_n) rekursiv durch $x_0 \geq a$ und

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Man beweise, dass (x_n) monoton fallend gegen \sqrt{a} konvergiert.

Beweis. Man weist einfach nach, dass $x_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= \left(\frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \right)^2 = \frac{1}{4} \left(x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2} \right) + a = \frac{1}{4} \left(x_n - \frac{a}{x_n} \right)^2 + a \geq a \end{aligned}$$

Wir weisen nach, dass (x_n) monoton fallend ist:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - x_n = \frac{a}{2x_n} - \frac{1}{2}x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0$$

Also ist die Folge (x_n) nach unten beschränkt, monoton fallend und konvergiert somit.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\lim x_n = \sqrt{a}$. Aus

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(x_n - \sqrt{a} + \frac{a}{x_n} - \sqrt{a} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n} \right) (x_n - \sqrt{a})$$

folgt

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| = \frac{1}{2} \underbrace{\left| 1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n} \right|}_{\leq 1} |x_n - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2} |x_n - \sqrt{a}| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} |x_0 - \sqrt{a}|,$$

woraus folgt, dass $x_n \rightarrow \sqrt{a}$ für $n \rightarrow \infty$. □

Aufgabe 4.7. (a) Man beweise folgende Fehlerabschätzung für $n \in \mathbb{N}^\times$:

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!}$$

(b) Man beweise, dass e eine irrationale Zahl ist.

Beweis.

(a) Da $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist die erste Ungleichung klar.

Sei $y_m := \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k!}$. Es gilt $y_m \rightarrow e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ für $m \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} y_m &= \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+2) \cdots (n+m)} \right] \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n+1} \right)^{m-2} \right] \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^k = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{nn!} \end{aligned}$$

Also gilt auch die zweite Ungleichung.

(b) Angenommen e ist rational, dann gibt es p , $n \in \mathbb{N}^\times$ mit $e = \frac{p}{n}$. Nach (a) gilt dann:

$$0 < \frac{p}{n} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!}$$

Also ist

$$0 < \underbrace{n!p - n \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{Z}} < 1.$$

Das ist aber nicht möglich, da es keine ganze Zahl zwischen 0 und 1 gibt. □

Aufgabe 4.8. Es sei (x_n) rekursiv definiert durch

$$x_0 := 1, \quad x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige, dass die Folge (x_n) konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $x_n > 1$ für $n \geq 1$. Für $n = 1$ haben wir $x_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$. Nehmen wir an, es gilt $x_n > 1$, so folgt $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} > 1$. Unmittelbar aus der rekursiven Definition $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ und aus $x_n > 1$ für $n \geq 1$ folgt $x_n < 2$ für $n \geq 2$. Für $n \geq 1$ gilt sogar $x_n \in [1.5, 2]$, da

$$1.5 = 1 + \frac{1}{2} \leq x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \leq 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

Insbesondere ist die Folge beschränkt.

Als nächstes zeigen wir, dass die Teilfolge (x_{2n}) monoton wachsend ist. Da $x_2 = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ist $x_2 > x_0 = 1$. Nun sei nach Induktionsannahme $x_{2n} \geq x_{2(n-1)}$.

$$\begin{aligned} x_{2(n+1)} - x_{2n} &= 1 + \frac{1}{x_{2n+1}} - \left(1 + \frac{1}{x_{2n-1}}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2n}}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{2(n-1)}}} = \frac{x_{2n}}{x_{2n} + 1} - \frac{x_{2(n-1)}}{x_{2(n-1)} + 1} \\ &= \frac{x_{2n}(x_{2(n-1)} + 1) - x_{2(n-1)}(x_{2n} + 1)}{(x_{2n} + 1)(x_{2(n-1)} + 1)} = \frac{x_{2n} - x_{2(n-1)}}{(x_{2n} + 1)(x_{2(n-1)} + 1)} \geq 0 \end{aligned}$$

Also ist (x_{2n}) eine konvergente Teilfolge von (x_n) .

Wir weisen nun nach, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist. Sei dazu $n \geq 1$ beliebig.

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= \left| 1 + \frac{1}{x_n} - \left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) \right| = \left| \frac{x_{n-1} - x_n}{x_n \cdot x_{n-1}} \right| \leq \frac{1}{2} |x_{n-1} - x_n| \\ &\leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot |x_2 - x_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Für $m \geq n \geq 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} \pm \dots - x_n| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Somit finden wir zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|x_m - x_n| < \epsilon, \quad \text{für } m \geq n \geq N,$$

und (x_n) ist eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge besitzt, also selbst konvergent.

Sei $g \in [1.5, 2]$ der Grenzwert von (x_n) . Mit den Grenzwertsätzen folgt nun

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x_n} = 1 + \frac{1}{g}$$

Diese Gleichung hat die positive Lösung $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

Alternativer Beweis. Wir zeigen per Induktion $|x_n - g| \leq \frac{1}{g^{n+1}}$, wobei g die positive Lösung der Gleichung $g = 1 + \frac{1}{g}$ bezeichnet.

Für $n = 0$ haben wir $|x_0 - g| = |1 - g| = \left| -\frac{1}{g} \right| \leq \frac{1}{g^1}$.

Sei nach Induktionsannahme $|x_{n-1} - g| \leq \frac{1}{g^n}$. Dann folgt wegen $x_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |x_n - g| &= \left| 1 + \frac{1}{x_{n-1}} - \left(1 + \frac{1}{g} \right) \right| = \left| \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{g} \right| \\ &= \left| \frac{g - x_{n-1}}{x_{n-1} \cdot g} \right| \leq \frac{1}{g} \cdot |x_{n-1} - g| \leq \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{g^n} = \frac{1}{g^{n+1}} \end{aligned}$$

Da $g > 1$, folgt $x_n \rightarrow g$. □

Aufgabe 4.9. Die **Fibonacci-Zahlen** f_n sind rekursiv definiert durch

$$f_0 := 0, \quad f_1 := 1, \quad f_{n+1} := f_n + f_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^\times$$

Man beweise, dass $\lim \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} \right) = g$, wobei g der Grenzwert aus Aufgabe 8 bezeichne.

Beweis. Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist monoton wachsend und für $n \geq 1$ gilt $f_n \geq 1$. Sei g der Grenzwert aus Aufgabe 8, also die positive Lösung der quadratischen Gleichung $g = 1 + \frac{1}{g}$. Sei $F_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$, $n \in \mathbb{N}^\times$. Wir wollen beweisen, dass die Folge $(F_n)_{n \geq 1}$ den Grenzwert g hat:

$$\begin{aligned} |F_n - g| &= \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} - g \right| = \left| \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} - g \right| = \left| 1 + \frac{1}{F_{n-1}} - \left(1 + \frac{1}{g} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{F_{n-1}} - \frac{1}{g} \right| = \left| \frac{g - F_{n-1}}{F_{n-1} \cdot g} \right| \leq \frac{1}{g} |F_{n-1} - g| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{g} \right)^{n-1} |F_1 - g| \end{aligned}$$

Da $0 < \frac{1}{g} = g - 1 < 1$ folgt $\left(\frac{1}{g} \right)^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und damit $\lim F_n = g$. □

Aufgabe 4.10. Es seien

$$x_0 := 5, \quad x_1 := 1, \quad x_{n+1} := \frac{3}{2}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^\times.$$

Man verifiziere, dass (x_n) konvergiert und bestimme $\lim x_n$.

Beweis. Für $n \geq 1$ gilt:

$$|x_n - x_{n-1}| = \left| \frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{1}{3}x_{n-2} - x_{n-1} \right| = \frac{1}{3}|x_{n-1} - x_{n-2}| = \dots = \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \underbrace{|x_1 - x_0|}_{=4}$$

Und für $m \geq n \geq 1$ folgt mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} \pm \dots + x_{n+1} - x_n| \\
&\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\
&= 4 \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} + 4 \left(\frac{1}{3}\right)^{m-2} + \dots + 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[1 + \frac{1}{3} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{m-n-1}\right] \\
&\leq 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{3}{2} = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

Also bildet (x_n) eine Cauchyfolge und da \mathbb{R} vollständig ist, konvergiert sie.

Wir bestimmen nun ihren Grenzwert. Für $n \geq 1$ haben wir

$$\begin{aligned}
x_n - x_{n-1} &= \frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{1}{3}x_{n-2} - x_{n-1} = -\frac{1}{3}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 (x_{n-2} - x_{n-3}) \\
&= \dots = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} (x_1 - x_0) = (-4) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
x_n &= x_{n-1} + (-4) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= x_{n-2} + (-4) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + (-4) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \dots = x_0 + (-4) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 5 - 4 \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{3}\right)^k.
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ liefert nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 5 - 4 \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 5 - 4 \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 5 - 4 \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}} = 5 - 4 \cdot \frac{3}{4} = 2$$

□

5. Uneigentliche Konvergenz

6. Vollständigkeit

7. Reihen

8. Absolute Konvergenz

9. Potenzreihen

Aufgabe 9.2. Die Potenzreihe $a = \sum_k (1+k)X^k$ hat Konvergenzradius 1 und für die durch a dargestellte Funktion \underline{a} gilt: $\underline{a}(z) = (1-z)^{-2}$ für $|z| < 1$.

Beweis. Sei $a_k = 1+k$. Dann ist $a = \sum_k a_k X^k$. Es gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1+k}{2+k} \right| = 1$$

Also existiert dieser Grenzwert und nach Satz 9.4 ist

$$\rho_a = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1$$

der Konvergenzradius von a .

Seien $b := \sum_k b_k X^k := \sum_k X^k$ und $c := \sum_k c_k X^k := \sum_k k X^k$. Diese Reihen haben ebenfalls Konvergenzradius 1. Also gilt für $z \in \mathbb{K}$, $|z| < 1$:

$$\underline{a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} k z^k = \underline{b}(z) + \underline{c}(z)$$

Wir wissen bereits, dass $\underline{b}(z) = \frac{1}{1-z}$. Wir müssen noch $\underline{c}(z)$ berechnen. Sei $s_n := \sum_{k=0}^n k z^k$.

$$\begin{aligned} (1-z)s_n &= (1-z) \sum_{k=0}^n k z^k = \sum_{k=0}^n k z^k - k z^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n k z^k - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1) z^k = 0 + \sum_{k=1}^n (k z^k - (k-1) z^k) - n z^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} - n z^{n+1} = z \sum_{k=0}^{n-1} z^k - n z^{n+1} \\ &= z \left(\frac{1-z^n}{1-z} \right) - \frac{(1-z)n z^{n+1}}{1-z} = \frac{z - z^{n+1} - n z^{n+1} + n z^{n+2}}{1-z} \\ &= \frac{z - (n+1) z^{n+1} + n z^{n+2}}{1-z} \end{aligned}$$

Also haben wir $s_n \rightarrow \frac{z}{(1-z)^2}$ für $n \rightarrow \infty$ und es folgt

$$\underline{c}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k z^k = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Somit haben wir

$$\underline{a}(z) = \underline{b}(z) + \underline{c}(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1-z+z}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

□

Kapitel III.

Stetige Funktionen

1. Stetigkeit
2. Topologische Grundbegriffe
3. Kompaktheit
4. Zusammenhang
5. Funktionen in \mathbb{R}
6. Die Exponentialfunktion und Verwandte

Kapitel IV.

Differentialrechnung in einer Variablen

1. Differenzierbarkeit
2. Mittelwertsätze und ihre Anwendung
3. Taylorsche Formeln
4. Iterationsverfahren

Kapitel V.

Funktionenfolgen

1. Gleichmässige Konvergenz
2. Stetigkeit und Differenzierbarkeit bei Funktionenfolgen
3. Analytische Funktionen
4. Polynomiale Approximation

Kapitel VI.

Integralrechnung in einer Variablen

1. Sprungstetige Funktionen
2. Stetige Erweiterungen
3. Das Cauchy-Riemannsche Integral
4. Eigenschaften des Integrals
5. Die Technik des Integrierens
6. Summen und Integrale
7. Fourierreihen
8. Uneigentliche Integrale
9. Die Gammafunktion

Kapitel VII.

Differentialrechnung in mehrerer Variabler

1. Stetige lineare Abbildungen
2. Differenzierbarkeit
3. Rechenregeln
4. Multilineare Abbildungen
5. Höhere Ableitungen
6. Nemytskiioperatoren und Variationsrechnung
7. Umkehrabbildungen
8. Implizite Funktionen
9. Mannigfaltigkeiten
10. Tangenten und Normalen

Kapitel VIII.

Kurvenintegrale

1. Kurven und ihre Länge
2. Kurven in \mathbb{R}^n
3. Pfaffsche Formen
4. Kurvenintegrale
5. Holomorphe Funktionen
6. Meromorphe Funktionen