Danvy 的简化 CPS：超过 40 行的解释

Belleve Invis · 2014-05-18

这篇文章是来解释某 PL 界巨擘引以为豪的 40 篇代码的来龙去脉的。

Fischer 和 Plotkin 奠基性的文章里，CPS 的结果语句是非常冗繁的。它们的方法会把表达式

$$\lambda f.\ \lambda x.\ \lambda y.(f\ y)\ x$$

变成

$$\lambda k.\ k(\lambda f.\ \lambda k.\ k(\lambda x.\ \lambda k.\ k(\lambda y.\ \lambda k.(\lambda k.(\lambda k.\ k\ f)(\lambda m.(\lambda k.\ k\ y)(\lambda n.(m\ \ n)\ \ k)))(\lambda m.(\lambda k.\ k\ x)(\lambda n.(m\ \ n$$

这显然过于冗繁。尽管一些简化——比如 β 规约——可以消除冗余的东西，但这种在变换后的规约也会抹掉 CPS 的痕迹。因此，最合适的方法是在变换的时候一步完成规约，来简化最终代码同时保持 CPS 的特质。

下面是 Fischer 与 Plotkin 的原版 CPS（函数调用用中点 $\cdot$ 表示）：

$$\begin{aligned}
[\![x]\!] &= \lambda^1\varkappa.\ \varkappa \cdot^1 x \\
[\![\lambda x.\ M]\!] &= \lambda^2\varkappa.\ \varkappa \cdot^2 (\lambda^3 x.\ [\![M]\!]) \\
[\![M \cdot N]\!] &= \lambda^4\varkappa.\ [\![M]\!] \cdot^3 (\lambda^5 m.\ [\![N]\!] \cdot^4 (\lambda^6 n.(m \cdot^6 n) \cdot^5 \varkappa))
\end{aligned}$$

我们把这里所有的 λ 和 $\cdot$ 都编号以进行分析。

第一步

问题 1：λ^1、λ^2、λ^4 这三个 λ 抽象能否在后期规约中消除掉？ λ^1、λ^2、λ^4 可能出现在三个地方：λ^3 内部、$\cdot^3$ 前项、$\cdot^4$ 前项。后两种情况里 CPS 变换会构造出两个可约项（Redex），它们会被很快消除；然而对于第一种情况，就没有那么简单了。结论：**λ^1、λ^2 和 λ^4 能否被消除取决于其所在的环境。**

问题 2：那么这种环境依赖能够绕开吗？ 可以。通过向 λ^3 引入一个 η 可约项就可以了。上述表达式中第二条将会变为：

$$[\![\lambda x.\, M]\!] = \lambda^2 \varkappa.\, \varkappa \cdot^2 (\lambda^3 x.\, \lambda^7 k.\, [\![M]\!] \cdot^7 k)$$

由于 $[\![M]\!]$ 总是一个 λ 抽象，上述 η 变换是安全的。

因此：

问题 3：现在 λ^1、λ^2、λ^4 这三个 λ 抽象能否在后期规约中消除掉？ 可以。现在它们是 $\cdot^3$、$\cdot^4$、$\cdot^7$ 的前项，都会构造出 β 可约项，因此可以被消除。

第二步

在进行第一步的修改之后我们发现了三处总是被消除掉的 λ 抽象，现在来更细致地分析它们。

问题 4：传入 λ^1、λ^2、λ^4 的参数 $\varkappa$ 是什么？ 继续看三种情况 $\cdot^3$、$\cdot^4$、$\cdot^7$。在前两种情况里传入的是一个 λ 抽象，但是第三种情况中，传入的是符号 k。于是，再一次地，出现了不一致的情况。

问题 5：这种不一致性可以消除吗？ 可以。像问题 2 里那样再次做一次 η 膨胀，可以得到：

$$[\![\lambda x.\, M]\!] = \lambda^2 \varkappa.\, \varkappa \cdot^2 (\lambda^3 x.\, \lambda^7 k.\, [\![M]\!] \cdot^7 (\lambda^8 m.\, k \cdot^8 m))$$

然后重复问题 4：

问题 6：传入 λ^1、λ^2、λ^4 的参数 $\varkappa$ 是什么？ λ^5、λ^6 和 λ^8，都是 λ 抽象。也就是说，$\varkappa$ 将永远是 λ 抽象，不会是别的。

第三步

问题 7：$\varkappa$ 会出现在哪里？ 三个位置：$\cdot^1$ 的前项、$\cdot^2$ 的前项，与 $\cdot^5$ 的后项。从问题 6 的结论可知，$\cdot^1$ 和 $\cdot^2$ 总会构造出 β 可约项，而 $\cdot^5$ 就没有那么明显的规律了。我们又遇到了问题。

问题 8：那这个问题可以消除吗？ 也可以。用同样的方法，将变换 3 改写为

$$[\![M \cdot N]\!] = \lambda^4\varkappa.\,[\![M]\!] \cdot^3 (\lambda^5 m.\,[\![N]\!] \cdot^4 (\lambda^6 n.(m \cdot^6 n) \cdot^5 (\lambda^9 a.\,\varkappa \cdot^9 a)))$$

问题 9：那么，现在 $\varkappa$ 会出现在哪里？ 三个位置：$\cdot^1$ 的前项、$\cdot^2$ 的前项，与 $\cdot^9$ 的前项。从问题 6 的结论可知，$\cdot^1$、$\cdot^2$ 和 $\cdot^9$ 都会构造出 β 可约项，故对 $\varkappa$ 的调用也是完全可消除的。

结论

CPS 变换引入的六个 λ 和六个调用（$\cdot$ ）都是可消除的，我们用红色标注它们：

$$\begin{aligned}
[\![x]\!] &= {\color{red}\lambda^1}\varkappa.\,\varkappa {\color{red}\cdot^1} x \\
[\![\lambda x.\,M]\!] &= {\color{red}\lambda^2}\varkappa.\,\varkappa {\color{red}\cdot^2} (\lambda^3 x.\,\lambda^7 k.\,[\![M]\!] {\color{red}\cdot^7} ({\color{red}\lambda^8} m.\,k \cdot^8 m)) \\
[\![M \cdot N]\!] &= {\color{red}\lambda^4}\varkappa.\,[\![M]\!] {\color{red}\cdot^3} ({\color{red}\lambda^5} m.\,[\![N]\!] {\color{red}\cdot^4} ({\color{red}\lambda^6} n.(m \cdot^6 n) \cdot^5 (\lambda^9 a.\,\varkappa {\color{red}\cdot^9} a)))
\end{aligned}$$

使用 $[\![M]\!] {\color{red}\cdot} ({\color{red}\lambda} x.\,x)$ 形式的调用之后，不会留下任何红色的 λ 和 $\cdot$ ，黑色的 λ 与 $\cdot$ 则会出现在结果中。只考虑红色符号的话，我们可以把 $[\![\ldots]\!]$ 看成类型为 $syntax \to (syntax \to syntax) \to syntax$ 的函数。可以证明，如下形式的表达式：

$$\lambda k.\,[\![M]\!] {\color{red}\cdot} ({\color{red}\lambda} m.\,k \cdot m)$$

所产生的「黑色」结果与 Fischer 和 Plotkin 的 $[\![M]\!]$ 的结果 $\beta\eta$ 等价。

将上面的「黑色」符号写成 Quasiquote，红色写成 Lambda 的话，你就写出了最简单的 CPS 变换器了。

尾递归的处理

差点忘记说尾递归了。其实想处理尾递归并不困难，做法是，引入一个特殊的符号（蓝色 k_{return}），以及一套转门处理它的变换 $[\![M]\!]'$，区别对待下就可以了。

$$
\begin{aligned}
[\![x]\!] &= \lambda\varkappa.\,\varkappa \cdot x \\
[\![\lambda x.\,M]\!] &= \lambda\varkappa.\,\varkappa \cdot (\lambda x.\,\lambda k_{\text{return}}.\,[\![M]\!]' \cdot k_{\text{return}}) \\
[\![M \cdot N]\!] &= \lambda\varkappa.\,[\![M]\!] \cdot (\lambda m.\,[\![N]\!] \cdot (\lambda n.(m \cdot n) \cdot (\lambda a.\,\varkappa \cdot a))) \\
[\![x]\!]' &= \lambda k_{\text{return}}.\,k_{\text{return}} \cdot x \\
[\![\lambda x.\,M]\!]' &= \lambda k_{\text{return}}.\,k_{\text{return}} \cdot (\lambda x.\,\lambda k_{\text{return}}.\,[\![M]\!]' \cdot k_{\text{return}}) \\
[\![M \cdot N]\!]' &= \lambda k_{\text{return}}.\,[\![M]\!] \cdot (\lambda m.\,[\![N]\!] \cdot (\lambda n.(m \cdot n) \cdot k_{\text{return}}))
\end{aligned}
$$