

Конспект по теории вычислимости  
IV семестр, 2021 год  
Современное программирование, факультет математики и  
компьютерных наук, СПбГУ  
(лекции Пузыниной Светланы Александровны)

Тамарин Вячеслав

March 10, 2021

# Contents

<b>1</b>	<b>Вычислимость. Система вычислимости по Клини</b>	<b>3</b>
1.1	Рекурсивные функции . . . . .	3
1.1.1	Простейшие функции . . . . .	3
1.1.2	Операторы . . . . .	3
1.1.3	Функции . . . . .	4
1.1.4	Оператор ограниченной минимизации . . . . .	6
1.1.5	Предикаты . . . . .	7
1.1.6	Теоремы про рекурсии . . . . .	8
1.2	Равносильность МТ и ЧРФ . . . . .	11
1.2.1	Функция Аккермана . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Разрешимые и перечислимые множества</b>	<b>15</b>
2.1	Определения . . . . .	15
2.2	Перечислимые множества . . . . .	15
2.3	Универсальные функции . . . . .	18
2.3.1	Перечислимое неразрешимое множество . . . . .	20
2.3.2	Главные универсальные функции . . . . .	21
2.3.3	Теорема Райса . . . . .	23
2.4	Теорема о неподвижной точке . . . . .	24
2.5	$m$ -сводимость . . . . .	25

Исходный код на [https://github.com/tamarinvs19/theory\\_university](https://github.com/tamarinvs19/theory_university)

**Некоторые доказательства были опущены на лекции, но написаны мной. Они выделены оранжевыми символами:**

□ Исправляйте, дополняйте, меняйте. Чем меньше недоказанных утверждений, тем лучше! ■

# Index

$k$ -местная частичная функция, 3

кусочное задание функции, 10

общерекурсивная функция, 4

оператор минимизации, 4

оператор ограниченной минимизации, 6

оператор примитивной рекурсии, 3

оператор суперпозиции, 3

перечислимое множество, 16

предикаты, 7

примитивно рекурсивная функция, 4

проекция, 18

простейшие функции, 3

равносильность МТ и **ЧРФ**, 11

разрешимое множество, 15

рекурсия возвратная, 9

рекурсия совместная, 10

универсальная функция, 19

функция Аккермана, 14

частично рекурсивная функция, 4

# Chapter 1

## Вычислимость. Система вычислимости по Клини

### 1.1 Рекурсивные функции

#### Лекция 1: †

11 feb

##### Определение 1

Пусть функция  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , где  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Такая функция называется  **$k$ -местной частичной функцией**. Если  $k = 0$ , то  $f = \text{const}$ .

#### 1.1.1 Простейшие функции

**Простейшими** будем называть следующие функции:

- Нуль местный нуль — функция без аргументов, возвращающая 0;
- Одноместный нуль —  $0(x) = 0$ ;
- Функция следования —  $s(x) = x + 1$ ;
- Функция выбора (проекция) —  $I_n^m(x_1, \dots, x_n) = x_m$

#### 1.1.2 Операторы

Определим три оператора:

##### Определение 2

- Функция  $f$  **получается оператором суперпозиции** из функций  $h$  и  $g_i$ , где

$$h(y_1, \dots, y_m), g_i(x_1, \dots, x_n); 1 \leq i \leq n,$$

если

$$f = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Оператор обозначается **S**.

- Функция  $f^{(n+1)}_a$  получается оператором примитивной рекурсии из  $g^{(n)}$  и  $h^{(n+2)}$ , если

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n) \\ f(x_1, \dots, x_n, y+1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)) \end{cases}$$

Оператор обозначается **R**.

- Функция  $f$  задается оператором минимизации (**M**), если она получается из функции  $g$ :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \mu y [g(x_1, \dots, x_n, y) = 0] = \\ &= \begin{cases} y & g(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \wedge g(x_1, \dots, x_n, i)^b \neq 0 \forall i < y \\ \uparrow^c & \text{else} \end{cases} \end{aligned}$$

<sup>a</sup>Здесь и далее  $f^{(n)}$  обозначается функция, принимающая  $n$  аргументов, то есть  $n$ -местная

<sup>b</sup>подразумевается, что функция определена в этих точках

<sup>c</sup>не определена

#### Пример 1.1.1.

$$x - y = \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ \uparrow, & x < y \end{cases}$$

Можно задать, используя оператор минимизации:

$$x - y = \mu z [|(y + z) - x| = 0].$$

### 1.1.3 Функции

#### Определение 3: Примитивно рекурсивная функция

Функция  $f$  называется **примитивно рекурсивной (ПРФ)**, если существует последовательность таких функций  $f_1, \dots, f_k$ , что все  $f_i$  либо простейшие, либо получены из предыдущих  $f_1, \dots, f_{i-1}$  с помощью одного из операторов **S** и **R** и  $f = f_k$ .

**Пример 1.1.2.** Докажем, что  $f(x, y) = x + y$  — ПРФ. По **R** можем получить  $f$  так:

$$\begin{cases} f(x, 0) &= x = I_1^1(x) = g \\ f(x, y+1) &= (x+y) + 1 = s(f(x, y)) = s(I_3^3(x, y, f(x, y))) = h \end{cases}$$

Теперь построим последовательность функций  $f_i$ , где последним элементом будет  $f$ , полученный с помощью **R**:

$$I_1^1, s, I_3^3, h = S(s, I_3^3), f.$$

#### Определение 4: Частично рекурсивная функция

Функция  $f$  называется **частично рекурсивной функцией (ЧРФ)**, если существует последовательность функций  $f_1, \dots, f_k$ , таких что  $f_i$  либо простейшая, либо получается из предыдущих с помощью одного из операторов **S**, **R**, **M**.

**Замечание.** Частично рекурсивная функция может быть не везде определена. Примитивно рекурсивная определена везде.

**Замечание.** Существуют частично рекурсивные функции, которые всюду определены, но при этом не являются ПРФ.

#### Определение 5

**Общерекурсивная функция** — всюду определенная частично рекурсивная.

**Пример 1.1.3.**  $\mu y[x + y + 1 = 0]$  — нигде не определена, но получается из последовательности других функций с помощью операторов.

**Лемма 1.** Следующие функции являются ПРФ:

1.  $\text{const}^{(n)}$
2.  $x + y$
3.  $x \cdot y$
4.  $x^y$ , где  $0^0$  можем определить, как хотим
5.  $\text{sg}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$
6.  $\overline{\text{sg}}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$
7.  $x \div 1 = \begin{cases} u & x = 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases}$
8.  $x \div y = \begin{cases} 0 & x < y \\ x - y & \text{else} \end{cases}$
9.  $|x - y|$



1. Сначала можем получить нужное число последовательной суперпозицией функции следования (получили константу от одной переменной), затем проецируем  $I_1^{n+1}$ , чтобы получить  $n$  переменных (первая - наша константа).
2. Доказали выше в [примере 1.1.2](#).
3.  $f(x, y) = xy$  определим так:

$$\begin{cases} f(x, 0) & = 0 \\ f(x, y + 1) & = f(x, y) + x \end{cases}$$

а складывать мы умеем.

4.  $f(x, y) = x^y$ :

$$\begin{cases} f(x, 0) & = 1 = s(0) \\ f(x, y + 1) & = f(x, y) * y \end{cases}$$

Умножать тоже можно по третьему пункту.

5.  $\text{sg}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \text{sg}(0) & = 0 \\ \text{sg}(x + 1) & = 1 = s(0) \end{cases}$$

6. Аналогично

$$7. f(x) = x \dot{-} 1$$

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(x+1) &= x = I_1^1(x) \end{cases}$$

$$8. f(x, y) = x \dot{-} y$$

$$\begin{cases} f(x, 0) &= x = I_1^1(x) \\ f(x, y+1) &= f(x, y) \dot{-} 1 \end{cases}$$

$$9. f(x, y) = |x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$$

*Замечание.* Обычное вычитание не является **ПРФ**, так как не везде определено на  $\mathbb{N}$ .

#### 1.1.4 Оператор ограниченной минимизации

##### Определение 6: Оператор ограниченной минимизации

Функция  $f^{(n)}$  задается **оператором ограниченной минимизации** из функций  $g^{(n+1)}$  и  $h^{(n)}$ , если

$$\mu y \leq h(\bar{x}) [g(\bar{x}, y) = 0]^a.$$

Это означает, что

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} y & g(\bar{x}, y) = 0 \wedge y \leq h(\bar{x}) \wedge g(\bar{x}, i) \neq 0^b \forall i < y \\ h(\bar{x}) + 1 & \text{else} \end{cases}$$

<sup>a</sup>Здесь и далее  $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$ .

<sup>b</sup>Аналогично, подразумевается, что функция определена в этих точках

**Утверждение.** Пусть  $g^{(n+1)}, h^{(n)}$  — примитивно рекурсивные функции, и  $f^{(n)}$  получается из  $g$  и  $h$  с помощью ограниченной минимизации, то  $f$  тоже **ПРФ**.

□ Заметим, что  $f$  можно получить следующим образом:

$$f(\bar{x}) = \sum_{y=0}^{h(\bar{x})} \prod_{i=0}^y \text{sg}(g(\bar{x}, i)).$$

Внутреннее произведение равно единице только тогда, когда все  $g(\bar{x}, i) \neq 0$ . Если для некоторого  $y$  обнуляется  $g(\bar{x}, y)$ , то все произведения, начиная с  $y+1$ , будут равны нулю, поэтому просуммируем только  $y$  единиц. Если же такого  $y$  нет, получим сумму из  $h(\bar{x}) + 1$  единицы. Именно это и нужно.

Проверим, что можно получить

$$a(\bar{x}, y) = \sum_{i=0}^y g(\bar{x}, i), \quad m(\bar{x}, y) = \prod_{i=0}^y i = 0^y g(\bar{x}, i)$$

с помощью примитивной рекурсии:

$$\begin{cases} a(\bar{x}, 0) &= g(\bar{x}, 0) \\ a(\bar{x}, y+1) &= a(\bar{x}, y) + g(\bar{x}, y+1) \end{cases} \quad \begin{cases} m(\bar{x}, 0) &= g(\bar{x}, 0) \\ m(\bar{x}, y+1) &= m(\bar{x}, y) \cdot g(\bar{x}, y+1) \end{cases}$$

*Замечание.*  $0(x)$  можно исключить из определения простейших функций, так как ее можно получить с помощью оператора **R** для нульмерного  $0$  и  $I_2^2(x, y)$ :

$$0(y) = \begin{cases} 0(0) &= 0 \\ 0(y+1) &= I_2^2(y, 0) \end{cases}$$

### 1.1.5 Предикаты

#### Определение 7

Предикат — условие задающее подмножество:  $R \subset \mathbb{N}^k$ .

Предикат называется **примитивно рекурсивным (общерекурсивным)**, его характеристическая функция примитивно рекурсивная (общерекурсивная).

$$\chi_R(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \bar{x} \in R \\ 0, & \bar{x} \notin R \end{cases}$$

#### Утверждение.

- Если  $R, Q$  — примитивно рекурсивные (общерекурсивные) предикаты, то предикаты  $P \vee Q, P \wedge Q, P \rightarrow Q, \neg P$  тоже примитивно рекурсивные (общерекурсивные).
- Предикаты  $=, \leq, \geq, <, >$  тоже примитивно и общерекурсивны.

□

- Проверим, что характеристические функции примитивно / общерекурсивны:

$$\begin{aligned} \chi_{P \wedge Q}(\bar{x}) &= \chi_P(\bar{x}) \cdot \chi_Q(\bar{x}) \\ \chi_{P \vee Q}(\bar{x}) &= \text{sg}(\chi_P(\bar{x}) + \chi_Q(\bar{x})) \\ \chi_{P \rightarrow Q}(\bar{x}) &= \overline{\text{sg}}(\chi_P(\bar{x}) + \overline{\text{sg}}(\chi_Q(\bar{x}))) \\ \chi_{\neg P}(\bar{x}) &= \overline{\text{sg}}(\chi_P(\bar{x})) \end{aligned}$$

- Аналогично выразим, через простейшие:

$$\begin{aligned} \chi_{x=y}(x) &= \overline{\text{sg}}(|x - y|) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases} \\ \chi_{x < y}(x) &= \text{sg}(x \dot{-} y) \end{aligned}$$

Остальные можем выразить также или через уже проверенные  $<$  и  $\neg$ .

■

**Лемма 2.** Следующие функции являются примитивно рекурсивными:

1.  $\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$ , считаем, что  $\left\lfloor \frac{x}{0} \right\rfloor = x$
2.  $\text{Div}(x, y) = \begin{cases} 1, & y \mid x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$
3.  $\text{Prime}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{P} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$
4.  $f(x) = p_x$ , где  $p_x$  —  $x$ -тое простое число,  $p_0 := 2$
5.  $\text{ex}(i, x)$  — степень простого числа  $p_i$  разложения  $x$ ,  $\text{ex}(i, 0) := 0$

□



1.  $f(x, y) = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$ . Найдем минимальное  $k$ , что  $f'(x, y, k) = yk > x$ . Чтобы получить

$$f(x, y) = \min(k \mid f'(x, y, k)) - 1,$$

используем оператор минимизации:

$$f(x, y) = \mu k [\neg f'(x, y, k) = 0] - 1.$$

2.  $\text{Div}(x, y) = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \cdot y = x$

3. Определим  $\text{Div}'(x, y) = (y \leq 1) \vee (\neg \text{Div}(x, y))$ , эта функция проверяет, что число  $y$  не является нетривиальным делителем  $x$ .

Теперь, используя ограниченную минимизацию, выразим  $\text{Prime}(x)$  :

$$\text{Prime}(x) = (\mu y \leq h(x) [\text{Div}'(x, y) = 0]) = x, \text{ где } h(x) = x - 1.$$

То есть мы посмотрели на все меньшие числа, если среди них найдется нетривиальный делитель, то число не простое.

4. Пусть  $f'(x) =$  количество простых  $\leq x$ .

$$\begin{cases} f'(0) &= 0 \\ f'(x+1) &= \text{Prime}(x+1) + f(x) \end{cases}$$

Теперь можно вычислить  $f(x)$ : для этого определим функцию  $g(x, y) = (f'(y) = x)$ ,

$$f(x) = \mu y [\neg f'(x, y) = 0].$$

5. Чтобы найти степень вхождения простого числа  $p_i$  в  $x$ , сначала находим это простое число по номеру, затем находим минимальное  $k$ , что  $x$  не делится на  $p_i^k$  и вычитаем единицу.



### 1.1.6 Теоремы про рекурсии

**Теорема 1.1.1** (Канторовская нумерация). Пусть  $\pi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  :

$$\pi(x, y) = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1) + y.$$

- Тогда для любого  $z$  существует единственное представление  $z = \pi(x, y)$ .
- Причем функции  $x(z), y(z)$  примитивно рекурсивные.



- Запишем  $\pi(x, y) = \binom{x+y+1}{2} + y$ . Заметим, что для  $n > m$  верно

$$\binom{n}{2} - \binom{m}{2} \geq \binom{n}{2} - \binom{n-1}{2} = n - 1.$$

Предположим, что  $x + y > x' + y'$  и  $\pi(x, y) = \pi(x', y')$ . Тогда

$$y' - y = \binom{x+y+1}{2} - \binom{x'+y'+1}{2} \geq x+y > x'+y'.$$

Но  $y \geq 0$ ,  $x' \geq 0$ , поэтому  $y' - y \leq y$ , а  $x' + y' \geq y'$ , а тогда  $y' - y \leq x' + y'$ , что противоречит полученному выше неравенству.

Если  $x + y = x' + y'$ , то  $0 = \pi(x, y) - \pi(x', y') = y - y'$ . Тогда  $y = y' = 0$ , поэтому  $x = x'$ .

Доказали, что из равенства  $\pi(x, y) = \pi(x', y')$  следует равенство  $(x, y) = (x', y')$ .

- Можно по-честному все посчитать и выразить  $x(z)$ ,  $y(z)$ . Пусть

$$\begin{aligned} w &= x + y \\ t &= \frac{1}{2}w(w + 1) = \frac{w^2 + w}{2} \\ z &= t + y \end{aligned}$$

Решим квадратное уравнение, чтобы выразить  $w$  через  $t$ <sup>1</sup>:

$$w = \frac{-1 + \sqrt{8t + 1}}{2}.$$

Запишем неравенство:

$$t \leq z = t + y < t + (w + 1) = \frac{(w + 1)^2 + (w + 1)}{2}.$$

Аналогично выразим  $w + 1$  через  $z$ : имеем  $z < \frac{(w+1)^2 + (w+1)}{2}$ , решаем неравенство, а далее вспоминаем, что все числа положительные и можно забыть про отрицательные корни. Отсюда

$$w \leq \frac{-1 + \sqrt{8z + 1}}{2} < w + 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} w &= \left\lfloor \frac{-1 + \sqrt{8z + 1}}{2} \right\rfloor \\ t &= \frac{w^2 + w}{2} \\ y &= z - t \\ x &= w - y \end{aligned}$$

Таким образом, мы выразили через  $z$  обе координаты. Единственный момент — нужно извлекать корень, в натуральную степень возводить мы умеем, поэтому можем с помощью ограниченной минимизации перебрать все меньшие числа, возвести их в квадрат и сравнить с нашим числом.



**Теорема 1.1.2** (Возвратная рекурсия). Зафиксируем  $s$ . Пусть

$$\begin{cases} f(\bar{x}, 0) &= g(\bar{x}) \\ f(\bar{x}, y + 1) &= h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, t_1(y)), \dots, f(\bar{x}, t_s(y))) \end{cases}$$

где  $\forall 1 \leq i \leq s \ t_i(y) \leq y$ ,  $g^{(n)}, h^{(n+1+s)}, t_i^{(1)}$ .

Тогда, если  $g, h, t_i$  — примитивно / общерекурсивные, то и  $f$  тоже.

Основная идея этой теоремы — можем использовать все ранее вычисленные значения функции, а не только предыдущее.

□ Построим с помощью примитивной рекурсии функцию  $m(\bar{x}, y)$ , которая возвращает закодированную последовательность  $f(\bar{x}, i)$ ,  $0 \leq i \leq y$ .

<sup>1</sup>отрицательный корень можем сразу отбросить

Кодировать будем так: каждому  $f(\bar{x}, i)$  будет соответствовать  $p_i$  ( $i$ -ое простое число) в степени  $1 + f(\bar{x}, i)$ .

Если мы построим эту функцию, то  $f(\bar{x}, y)$  — уменьшенная на 1 степень  $y$ -ого простого, обозначим функцию, которая это делает:

$$f(\bar{x}, y) = \text{ith}(y, m(\bar{x}, y)).$$

Вернемся к построению  $m$ :

$$\begin{cases} m(\bar{x}, 0) &= 2^{1+g(\bar{x})} \\ m(\bar{x}, y+1) &= m(\bar{x}, y) \cdot p_{y+1}^{1+h(\bar{x}, y, \text{ith}(t_1(y), m(\bar{x}, y)), \dots, \text{ith}(t_k(y), m(\bar{x}, y)))} \end{cases}$$



**Теорема 1.1.3** (Совместная рекурсия). Пусть  $f_i^{(n+1)}$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,

$$\begin{cases} f_i(\bar{x}, 0) &= g_i(\bar{x}) \\ f_i(\bar{x}, y+1) &= h_i(\bar{x}, y, f_1(\bar{x}, y), \dots, f_k(\bar{x}, y)) \end{cases}$$

Если  $g_i^{(n)}, h_i^{(k+2)}$ ,  $1 \leq i \leq k$  — примитивно / общерекурсивные, то  $f_i$  тоже.

Основная идея этой теоремы — можем использовать  $y$ -е значение каждой из  $k$  функций.

□ Заметим, что канторовскую функцию можно, последовательно применив несколько раз, расширить до  $k$ -местной. Обозначим полученную функцию за  $c$ , а обратные за  $c_1, \dots, c_k$ .

Давайте просто объединим все  $f_i$  в одну функцию

$$m(\bar{x}, y) = c(f_1(\bar{x}, y), \dots, f_k(\bar{x}, y)).$$

Теперь каждую  $f_i$  можно вычислить

$$f_i(\bar{x}, y) = c_i(m(\bar{x}, y)).$$

Чтобы получить  $m$  достаточно использовать примитивную рекурсию:

$$\begin{cases} m(\bar{x}, 0) &= c(g_1(\bar{x}), \dots, g_k(\bar{x})) \\ m(\bar{x}, y+1) &= c( \\ &\quad h_1(\bar{x}, y, c_1(m(\bar{x}, y)), \dots, c_k(m(\bar{x}, y))), \\ &\quad \vdots \\ &\quad h_k(\bar{x}, y, c_1(m(\bar{x}, y)), \dots, c_k(m(\bar{x}, y))) \\ &\quad ) \end{cases}$$



**Теорема 1.1.4** (Кусочное задание функции). Пусть  $R_0, \dots, R_k$  — отношения<sup>a</sup>, такие что  $\bigsqcup_{i=0}^k R_i = \mathbb{N}^m$ <sup>b</sup>.

Для  $|\bar{x}| = n$  кусочно зададим функцию  $f^{(n)}$ :

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} f_0(\bar{x}), & \text{если } R_0(\bar{x}) \\ f_1(\bar{x}), & \text{если } R_1(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots \\ f_k(\bar{x}), & \text{если } R_k(\bar{x}) \end{cases}$$

Если  $f_i^{(n)}, R_i$  — примитивно / общерекурсивны, то и  $f$  тоже.

<sup>a</sup>Набор предикатов

<sup>b</sup>То есть для  $i \neq j$  верно  $R_i \cap R_j = \emptyset$ .

□ Рассмотрим характеристические функции  $\chi_{R_i}$  для  $R_i$ . Тогда

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^k f_i(\bar{x}) \cdot \chi_{R_i}(\bar{x}).$$

А это просто сумма произведений, которые мы можем вычислять. ■

## 1.2 Равносильность МТ и ЧРФ

**Теорема 1.2.1.** Функция вычисляется машиной Тьюринга тогда и только тогда, когда она частично рекурсивная (то есть вычислима по Клини).

□

$2 \Rightarrow 1$  Если  $f(x_1, \dots, x_n) = y$ , то считаем, что МТ получаем  $1^{x_1}01^{x_2}0 \dots 01^{x_n}$  и должна выдать  $1^y$ ; если  $f$  не определена, МТ должна заикливиться и наоборот.

- Для простых функций можем построить МТ напрямую:
  - Если мы хотим выдавать нуль, просто стираем вход.
  - Если нужно увеличить число на один, приписываем 1 в конец справа.
  - Если нужно вернуть  $k$ -ую проекцию, стираем все до начала  $k$ -ого числа (то есть нужно отсчитать  $k - 1$  нуль на входе), далее стереть все после.
- Для операторов **S, R, M**:

**S:** Пусть есть набор функций  $h^{(n)}, g_1^{(m)}, \dots, g_n^{(m)} \longrightarrow f^{(m)}$ , для каждой из которых есть машина Тьюринга  $M_h$  и  $M_{g_i}$ .

Хотим построить МТ  $M_S$  для  $S$ .

Сделаем это так:

- Копируем весь вход  $n$  раз:

$$(1^{x_1}01^{x_2} \dots 01^{x_n} *)^n.$$

- Запускаем  $M_{g_i}$  на соответствующей части полученного входа.  
Если нужно что-то записать, то будем сдвигать всю правую часть на нужное число клеток, чтобы освободить для место.  
МТ запускаем псевдопараллельно (по очереди даем поработать).  
В каждой части после окончания работы оставляем только ответ:

$$1^{y_1} * 1^{y_2} \dots * 1^{y_n},$$

где  $y_i = g_i(x_1, \dots, x_m)$ .

- Запускаем на этом результате  $M_h$ .

### Лекция 2: †

**R:** Пусть рекурсия задает  $f^{(m+1)}(x_1, \dots, x_m, y)$  из  $g^{(m)}$  и  $h^{(m+2)}$ .

$$\begin{cases} f(\bar{x}, 0) &= g(\bar{x}) \\ f(\bar{x}, y + 1) &= h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y)) \end{cases}$$

Считаем, что для  $g, h$  уже есть МТ ( $M_g$  и  $M_h$ ), и мы хотим построить  $M_f$ , которая будет вычислять  $f$ .

Построим вспомогательные МТ:

- $M_1$ : для входа  $1^{x_1}0 \dots 01^{x_m}01^y$  построим  $1^y01^{x_1}0 \dots 01^{x_m}001^{g(x_1, \dots, x_m)}$ . Для этого просто запустим  $M_g$  на входе, но не будем стирать его, а результат просто припишем после двух нулей справа.
- $M_2$ : для входа  $1^y01^{x_1}0 \dots 01^{x_m}01^u01^z$  построим  $1^y01^{x_1}0 \dots 01^{x_m}01^{u+1}01^{h(x_1, \dots, x_m, u, z)}$ . Для этого, используя  $M_h$ , допишем в конец вместо  $z$  результат  $h$  и допишем единицу к  $1^u$ . Здесь  $u + 1$  обозначает текущее значение  $y'$ , а значение  $h$  — значение  $f(y')$ .
- $M_3$ : для входа  $1^y01^{x_1}0 \dots 01^{x_m}01^u0^z$  оставим только  $1^z$ .
- $\Phi$ : для входа  $1^y01^{x_1}0 \dots 01^{x_m}01^u01^z$  проверим, что  $u \neq y$ .

Теперь соберем все вместе: сначала запустим  $M_1$ , далее пока  $\Phi$  возвращает неравенство, запускаем  $M_2$  (увеличиваем  $u$  на один, вычисляем следующее значение функции), и в конце стираем лишнее, запустив  $M_3$ .

**М:** Хотим по МТ  $M_g$  построить  $M_f$ , вычисляющую

$$f(\bar{x}, y) = \begin{cases} y & g(\bar{x}, y) = 0 \wedge g(\bar{x}, z) \neq 0 \quad \forall z < y \\ \uparrow & else \end{cases}$$

Аналогично построим несколько вспомогательных МТ:

- $N_1$ : приписывает 0 ко входу:

$$1^{x_1}0 \dots 01^{x_m} \longrightarrow 1^{x_1}0 \dots 01^{x_m}0.$$

- $N_2$ : дублирует вход, разделяя решеткой:  $w \longrightarrow w\#w$
- $N_3$ : в продублированном входе меняет вторую половину на результат  $M_g$

$$1^{x_1}0 \dots 01^{x_m}01^y\#1^{x_1}0 \dots 01^{x_m}01^y \xrightarrow{M_g} 1^{x_1}0 \dots 01^{x_m}01^y\#1^{g(x_1, \dots, x_m, y)}.$$

- $N_4$ : очищает все после решетки и дописывает единицу в конец

$$1^{x_1}0 \dots 01^{x_m}01^y\#w \longrightarrow 1^{x_1}0 \dots 01^{x_m}01^{y+1}.$$

- $N_5$ : стирает все, кроме ответа

$$1^{x_1}0 \dots 01^{x_m}01^y\#w \longrightarrow 1^y.$$

- $\Phi$ : проверяет, что после решетки что-то еще есть  $w\#v \longrightarrow v \neq \varepsilon$ .

Теперь можем построить  $M_\mu$  так:

$$N_1; N_2; N_3; \text{while } \Phi \text{ do } N_4, N_2, N_3; N_5.$$

**1  $\implies$  2** Теперь мы хотим промоделировать работу МТ с помощью частично рекурсивной функции. На вход должны либо выдать результат, либо заиклиться. Так как машины Тьюринга работают со строками, а функции с натуральными числами, нужно придумать правила кодирования.

Пусть есть конфигурация МТ

$$\alpha q_i a_j \beta,$$

где  $\alpha$  — строка слева от головки,  $q_i$  — состояние,  $a_j$  — текущий символ,  $\beta$  — справа от головки.

Пронумеруем рабочий алфавит  $\Gamma = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ , где  $a_0$  — пустой символ ( $\_$ ).

**Кодирование конфигураций** Теперь можем конфигурацию записать как

$$\tilde{\alpha}, \tilde{q}_i, \tilde{a}_j, \tilde{\beta},$$

где  $\tilde{\alpha}$  — число, соответствующее  $\alpha$  в  $m$ -ичной записи,  $\tilde{q}_i$  — просто номер состояния,  $\tilde{a}_j$  — номер в алфавите ( $j$ ),  $\tilde{\beta}$  — число, соответствующее  $\beta$  в  $m$ -ичной записи, записанное справа налево.

Сдвиги обозначать будем  $d$ : вправо  $d = 1$ , влево  $d = 2$ .

Терминальное состояние —  $z$ . Множество состояний тоже пронумеруем и получим множество состояний  $\tilde{Q} = \{0, 1, \dots, |Q| - 1\}$ .

**Пример 1.2.1.** Рассмотрим небольшой пример.  $\Gamma = \{a_0, a_1\}$ , тогда следующее состояние будет записано как  $(22, 3, 1, 13)$ :

$$\underbrace{a_1 a_0 a_1 a_1 a_0}_{\alpha} q_3 \underbrace{a_1 a_1 a_0 a_1 a_1}_{\beta}$$

**Кодирование команд** Пусть есть переход  $(q, a) \rightarrow (p, b, d)$ . Сопоставим  $p, b, d$  тройку функций  $\varphi_q, \varphi_a, \varphi_d$ :

$$\varphi_a: \tilde{Q} \times \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Gamma}$$

$$\varphi_q: \tilde{Q} \times \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{Q}$$

$$\varphi_d: \tilde{Q} \times \tilde{\Gamma} \rightarrow \{1, 2\}$$

Эти функции будут примитивно рекурсивными, так как заданы на конечном множестве, на остальных можем доопределить нулем.

**Преобразование конфигураций** Пусть у нас есть переход между двумя конфигурациями:

$$K = \alpha q_i a_j \beta \rightarrow \alpha' q'_i a'_j b' = K'.$$

Зададим функцию на числах, которая проделает этот переход  $\Phi: K \rightarrow K'$ . На самом деле эта функция состоит из четырех, которые мы сейчас и определим.

Пусть

$$\begin{aligned} \tilde{q}'_i(\tilde{\alpha}, \tilde{q}_i, \tilde{a}_j, \tilde{\beta}) &= \varphi_q(\tilde{q}_i, \tilde{a}_j) \\ \tilde{\alpha}'(\tilde{\alpha}, \tilde{q}_i, \tilde{a}_j, \tilde{\beta}) &= \begin{cases} \tilde{\alpha} \cdot m + \varphi_a(\tilde{q}_i, \tilde{a}_j), & \varphi_d(\tilde{q}_i, \tilde{a}_j) = 1 \\ \left\lfloor \frac{\tilde{\alpha}}{m} \right\rfloor, & \varphi_d(\tilde{q}_i, \tilde{a}_j) = 2 \end{cases} \\ \tilde{\beta}'(\tilde{\alpha}, \tilde{q}_i, \tilde{a}_j, \tilde{\beta}) &= \begin{cases} \tilde{\beta} \cdot m + \varphi_a(\tilde{q}_i, \tilde{a}_j), & \varphi_d(\tilde{q}_i, \tilde{a}_j) = 1 \\ \left\lfloor \frac{\tilde{\beta}}{m} \right\rfloor, & \varphi_d(\tilde{q}_i, \tilde{a}_j) = 2 \end{cases} \\ \tilde{a}'_j &= \begin{cases} \tilde{\beta} \bmod m, & \varphi_d(\tilde{q}_i, \tilde{a}_j) = 1 \\ \tilde{\alpha} \bmod m, & \varphi_d(\tilde{q}_i, \tilde{a}_j) = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим, что все эти формулы примитивно рекурсивные<sup>2</sup>.

**Общая работа МТ** Пусть  $K(0) = (\tilde{\alpha}_0, \tilde{q}_0, \tilde{a}_0, \tilde{\beta}_0)$  — начальная конфигурация. Чтобы получить новую конфигурацию для шага  $t$ , посчитаем все четыре параметра:

$$\begin{aligned} K(t) = ( & \\ & K_\alpha(\tilde{\alpha}_0, \tilde{q}_0, \tilde{a}_0, \tilde{\beta}_0, t) \\ & K_q(\tilde{\alpha}_0, \tilde{q}_0, \tilde{a}_0, \tilde{\beta}_0, t) \\ & K_a(\tilde{\alpha}_0, \tilde{q}_0, \tilde{a}_0, \tilde{\beta}_0, t) \\ & K_\beta(\tilde{\alpha}_0, \tilde{q}_0, \tilde{a}_0, \tilde{\beta}_0, t) \\ & ) \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Единственное, чего нет явно в лемме 1 выше, это остаток по модулю, но его легко получить из деления нацело.

Теперь запишем совместную рекурсию для  $K_\alpha, K_q, K_a, K_\beta$ :

$$\begin{cases} K_\alpha(\tilde{\alpha}_0, \tilde{q}_0, \tilde{a}_0, \tilde{\beta}_0, 0) &= \tilde{\alpha}_0 \\ K_\alpha(\tilde{\alpha}_0, \tilde{q}_0, \tilde{a}_0, \tilde{\beta}_0, t+1) &= \tilde{\alpha}'(K_\alpha(\dots, t), K_q(\dots, t), K_a(\dots, t), K_\beta(\dots, t)) \end{cases}$$

Для остальных точно также.

**Результат** Пусть начальное состояние  $q_0 a_0 \beta_0$  (стоим на самом левом символе), конечное —  $q_z a_z \beta_z$ , причем  $z$  встречаем впервые. То есть нам нужно вычислить функцию, которая переводит

$$\tilde{a}_0 + \tilde{b}_0 m \longrightarrow a_z + \beta_z m,$$

если машина Тьюринга пришла сюда и не определена, если МТ заикливается:

$$t_z = \mu t [K_q(t) = z].$$

Тогда результатом работы МТ будет

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & m \cdot K_\beta\left(0, 0, x \bmod m, \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor, \right. \\ & \left. \mu t [K_q(0, 0, x \bmod m, \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor, t) = z] \right) + \\ & + K_a(0, 0, x \bmod m, \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor) \end{aligned}$$

■

**Следствие 1.** Любую частично рекурсивную функцию можно представить так, что минимизация использовалась только один раз.

□ Сначала запишем для нее МТ, а потом постоим обратно функцию. В итоге получим эквивалентную функцию, причем по построению оператор минимизации использовался лишь один раз. ■

**Следствие 2.** Функция, вычисляемая за примитивно рекурсивное время <sup>a</sup>, является примитивно рекурсивной.

<sup>a</sup>время, ограниченное примитивно рекурсивной функцией

□ В построении функции использовали минимизацию по числу шагов МТ, поэтому, если работаем примитивно рекурсивное время, можем применить ограниченную минимизацию. ■

### 1.2.1 Функция Аккермана

Можно построить общерекурсивную функцию, которая растет быстрее любой примитивно рекурсивной. Из этого следует, что **ПРФ** не совпадает с **ОРФ**.

#### Определение 8: Функция Аккермана

**Функция Аккермана** — функция от двух аргументов  $\alpha_n(x)$ , которая определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha_0(x) &= x + 1 \\ \alpha_{n+1}(x) &= \alpha_n^{[x+2]}(x) = \underbrace{\alpha_n(\alpha_n(\dots(x)))}_{x+2 \text{ раза}} \end{cases}$$

**Теорема 1.2.2.**  $\alpha_n(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  растет быстрее любой примитивно рекурсивной.

□ «Доказательство – упражнение», занимает пару страниц, в ближайшее время появится здесь. ■

## Chapter 2

# Разрешимые и перечислимые множества

### 2.1 Определения

#### Определение 9: Разрешимое множество

Множество  $X \subseteq \mathbb{N}^k$  называется **разрешимым**, если его характеристическая функция вычислима<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Это может быть частично рекурсивная функция, машина Тьюринга,  $\lambda$ -функция...

*Замечание.* Любое конечное множество разрешимо. Пересечение, объединение, разность разрешимых тоже разрешимо.

**Теорема 2.1.1.** Множество  $X \subseteq \mathbb{N}$  разрешимо тогда и только тогда, когда  $X$  — множество значений всюду определенной вычислимой неубывающей функции (или пустое множество).

□

**1  $\implies$  2** Можем в характеристической функции  $\chi_X(n)$  возвращать  $n$  вместо 1, а в остальных значениях прошлое выданное. Эта функция подходит под описание.

**2  $\implies$  1** Если множество конечно, то оно разрешимо, так как можем задать функцию  $\chi_X$  на конечном числе точек. Если  $X$  бесконечно будем действовать, как описано далее.

Пусть есть функция  $f$ . Из нее хотим построить  $\chi_X$ . Посчитаем  $\chi_X(n)$  так: начнем с  $i = 0$

- вычислим  $f(i)$ ;
- если значение больше  $n$ , то в следующих входах, значения будут еще больше, поэтому можем сразу вернуть  $i$ ;
- если меньше, то посчитаем  $f(i + 1)$  и вернемся к предыдущему пункту;
- так как функция неубывающая и достигает всех значений из  $X$  (причем из бесконечно много, поэтому есть элемент больше  $n$ ), мы либо найдем значение больше  $n$  (тогда вернем 0), либо равное (тогда вернем единицу).

■

Лекция 3: †

25 feb

### 2.2 Перечислимые множества



**Определение 10: Перечислимое множество**

Множество  $X \subseteq \mathbb{N}^k$  называется **перечислимым**, если

- его полухарактеристическая функция вычислима:

$$\chi_X(n) = \begin{cases} 1, & n \in X \\ \uparrow, & n \notin X \end{cases}$$

- или, если существует алгоритм, который выводит все его элементы в некотором порядке.

**Теорема 2.2.1** (Об эквивалентных определениях). Следующие определения эквивалентны:

0. **Перечислимость:** существует алгоритм, который выводит все элементы в некотором порядке

1. область определения вычислимой функции
2. область значений вычислимой функции
3. его полухарактеристическая функция вычислима
4. область значений всюду определена вычислимой функцией

□

**0  $\implies$  2** Чтобы посчитать  $\chi_X(n)$ , запускаем алгоритм, перечисляющий элементы множества, ждем  $n$ .  
Если вывелось  $n$ , то выводим  $\chi_X(n) = 1$ , а иначе мы зациклились, то есть получили расходимость.

**3  $\implies$  1** Действительно, множество  $X$  будет областью определения  $\chi_X$ , а она вычислима.

**1  $\implies$  0** Пусть область определения вычисляется алгоритмом  $B$ .

Построим алгоритм  $A$  следующим образом: будем запускать  $B$  по шагам и выводить элементы множества

- 1 шаг на входе 0
- 2 шага на 0, 2 шага на 1
- 3 шага на 0, 1, 2
- и так далее
- как только  $B$  закончил работу на некотором элементе, выводим этот его.

Этот алгоритм  $A$  перечисляет наше множество, так как для алгоритма  $B$  требуется конечное время работы на элементах области определения.

**2  $\implies$  0** Аналогично, но выводим значение функции на элементе, на котором мы останавливаемся.

**1  $\implies$  2** Пусть  $X$  — область определения функции, которая вычисляется алгоритмом  $A$ . Рассмотрим следующую функцию:

$$b(n) = \begin{cases} n, & \text{если } A \text{ заканчивает работу на } n \\ \uparrow, & \text{если } A \text{ зацикливается на } n \end{cases}$$

Теперь  $X$  — область значений  $b(n)$ , а она вычислима.

**0  $\implies$  4** Пусть  $A$  — алгоритм, перечисляющий  $X$ . Рассмотрим любой  $n_0 \in X$ .

Построим функцию  $f$ , которая всюду определена и  $X$  — ее область значений.

$$f(n) = \begin{cases} t, & \text{если на } n\text{-ом шаге работы } A \text{ появляется } t \\ n_0, & \text{если ничего не появляется} \end{cases}$$

**4  $\implies$  2** Очевидно ■

**Замечание.** Все области значений и определений не применимы к пустому множеству, которое тоже перечислимое.

**Задача.** В определении перечислимого множества можно выводить элементы с повторениями. Это эквивалентно определению без повторений.

**Теорема 2.2.2.** Если считать перечислимыми только множества, для которых существует машина Тьюринга, выводящая каждый элемент множества *ровно по разу*, то их класс не поменяется.

□ Увеличиться класс точно не может, так как мы накладываем более строгое условие.

Проверим, что по обычной МТ  $M$ , перечисляющей множество  $A$ , можно построить МТ  $M'$ , которая будет выводить все элементы ровно один раз.

Пусть машина  $M'$  работает почти как, но записывает на ленту все числа, которые она уже выводила.

Теперь, если  $M$  должна вывести число,  $M'$  проверяет, что еще не возвращала его ранее, записывает и выдает. Если число уже записано, возвращать не будем. ■

**Теорема 2.2.3.** Объединение и пересечение перечислимых множеств тоже перечислимое.

□ По определению перечислимости для первого множества есть алгоритм  $A$ , который завершается на всех элементах этого множества. Аналогично для второго —  $B$ .

- Хотим проверить, что  $n$  принадлежит объединению. Будем давать алгоритмам  $A$  и  $B$  поработать по шагу. Ждем шага, на котором завершает работу хотя бы один алгоритм. Значит,  $n$  лежит в одном из множеств.
- Чтобы проверить принадлежность пересечению запустим сначала  $A$ , если он завершит работу, то запустим  $B$ . Если и  $B$  остановится,  $n$  лежит в обоих множествах.

Если элемент не принадлежит объединению или пересечению, получим расходимость. ■

**Теорема 2.2.4 (Пост).**  $A$  разрешимо тогда и только тогда, когда  $A$  и  $\bar{A}$  перечислимые.

□

**1  $\implies$  2** Так как  $A$  разрешимо, можем рассмотреть вычислимую характеристическую функцию  $\chi_A(n)$ .

Построим полухарактеристические для  $A$  и  $\bar{A}$ :

- для  $A$ : если  $n \in A$ , то  $\chi'_A = 1$ , иначе  $\chi'_A(n)$  расходится
- для  $\bar{A}$  аналогично, только результаты инвертированы.

**2  $\implies$  1** Пусть мы хотим проверить  $n \stackrel{?}{\in} A$ .

Запускаем одновременно по шагам алгоритмы, перечисляющие  $A$  и  $\bar{A}$ , ждем появления  $n$ . Рано или поздно должно появиться, так как в объединении  $A$  и  $\bar{A}$  дают все множество.

Если его выдал алгоритм для  $A$ , то  $\chi_A(n) = 1$ , а если для  $\bar{A}$ , то  $\chi_A(n) = 0$ .

**Определение 11: Проекция**

Подмножество  $P \subseteq \mathbb{N}$  называется **проекцией**  $Q \subseteq \mathbb{N}^2$ , если

$$\forall x: x \in P \iff \exists y: (x, y) \in Q.$$

**Теорема 2.2.5** (О проекции). Множество  $P$  перечислимое тогда и только тогда, когда  $P$  — проекция некоторого разрешимого множества  $Q$ .

□

$1 \implies 2$  Пусть  $A$  — алгоритм, перечисляющий  $P$ . Тогда подойдет

$$Q := \{(n, t) \mid n \text{ появляется в течение } t \text{ шагов работы } A\}.$$

$2 \implies 1$  Проекция перечислимого перечислима: берем алгоритм, которые перечисляет  $Q$ , но оставляем только первую координату.

**Теорема 2.2.6** (О графике). Частичная функция  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  вычислима тогда и только тогда, когда перечислим ее график

$$F := \{(x, y) \mid f(x) \text{ определена и } f(x) = y\}.$$

□

$1 \implies 2$  Чтобы перечислить все все точки графика будем по очереди запускать алгоритм для  $f$  на  $x \in \mathbb{N}$ , причем будем давать ему поработать  $i$  шагов на шаге  $i$ .

Если  $f(x)$  в некоторый момент вычислено, выводим  $(x, f(x))$ .

$2 \implies 1$  Построим алгоритм вычисляющий  $f$ .

Пусть нам на вход дан элемент  $x$ , запустим алгоритм, перечисляющий элементы  $F$ .

Если  $(x, f(x)) \in F$ , то есть  $f$  определена в точке  $x$ , и в какой-то момент мы выпишем значение.

Если же функция не определена в  $x$ , то пары  $(x, f(x))$  в  $F$  нет и мы заикливаемся.

*Замечание.* Различные названия типов множеств в других источниках:

перечислимое	разрешимое
полурешимое	
вычислимо перечислимое	вычислимое
полурекурсивное	рекурсивное
semi-decidable	decidable
semi-recursive	recursive
enumerable	

## 2.3 Универсальные функции

**Определение 12**

**Сечением** функции  $U^{(m+1)}(n, \bar{x})$  назовем функцию  $U_n(\bar{x})$  от  $m$  аргументов, которая получается из  $U$  фиксацией первого аргумента.

**Определение 13: Универсальная функция**

$U(n, \bar{x})$  — **универсальная** для класса  $K$  функция от  $m$  аргументов, если

- $\forall n: U_n(\bar{x}) \in K$
- $\forall f \in K \exists n: f = U_n$

То есть множество ее сечений совпадает с  $K$ .

*Замечание.* Универсальная функция существует только для счетных  $K$ .

*Замечание.* Все рассматриваемые функции частичные.

**Обозначение.**  $\mathcal{F}^m$  — *вычислимые функции от  $m$  аргументов.*

$\mathcal{F}_*^m$  — *всюду определенные вычислимые функции от  $m$  аргументов.*

*Без верхнего индекса по умолчанию подразумевается единица.*

**Теорема 2.3.1.** Существует вычислимая функция 2-х аргументов  $U \in \mathcal{F}^2$ , универсальная для класса вычислимых функций 1-ого аргумента  $\mathcal{F}^1$ .

□ Запишем все коды МТ, вычисляющих функции из  $\mathcal{F}^1$ , в порядке возрастания (сначала по длине, затем в алфавитном).

Пусть  $U(i, x)$  — функция, которая находит запись  $i$ -ой МТ  $M_i$ , запускает ее на входе  $x$  и возвращает результат.

Во-первых,  $U$  вычислима, так как вычисляется описанным выше алгоритмом.

Во-вторых, сечение  $U_i$  соответствует МТ  $M_i$ , поэтому  $U$  универсальна для  $\mathcal{F}^1$ . ■

**Следствие 3.** Существует  $U' \in \mathcal{F}^{m+1}$ , универсальная для  $\mathcal{F}^m$ .

*Замечание.* Здесь мы будем использовать  $m$ -местную канторовскую нумерацию  $c(x_1, \dots, x_m)$ , которую можно построить, например, последовательным сворачиванием пар. Обозначим обратные проекции на  $i$  координату  $c_i(y) = x_i$ .

□ Проверим, что универсальной функцией будет

$$U'(n, \bar{x}) := U(n, c(\bar{x})),$$

где  $U$  — универсальная для  $\mathcal{F}^2$ .

Во-первых, заметим, что все сечения вычислимы.

Далее рассмотрим произвольную функцию  $f(\bar{x}) \in \mathcal{F}^m$ . Найдем для нее одно из сечений  $U'$ .

Определим

$$g(y) := f(c_1(y), \dots, c_m(y)).$$

$g$  вычислима,  $U$  универсальная, поэтому

$$\exists n: U_n(y) = g(y).$$

$$\begin{aligned}
U^!(n, c(\bar{x})) &= && \text{(по определению } U) \\
= U(n, c(\bar{x})) &= && (n - \text{номер } g) \\
= g(c(\bar{x})) &= && \text{(по определению } g) \\
= f(c_1(c(\bar{x})), \dots, c_m(c(\bar{x}))) &= f(\bar{x})
\end{aligned}$$

То есть  $U^!$  действительно универсальная. ■

**Теорема 2.3.2.** Не существует  $U \in \mathcal{F}_*^2$  универсальной для  $\mathcal{F}^*$ .

□ Предположим, что такая функция  $U \in \mathcal{F}_*^2$  существует.

Рассмотрим диагональную функцию:

$$d^!(n) = U(n, n) + 1 \in \mathcal{F}_*.$$

С одной стороны,  $d^!(n)$  — общерекурсивная функция, поэтому из универсальности  $U$  следует, что существует сечение  $U_n = d^!$ .

С другой стороны,  $d^!(n)$  отличается от всех сечений  $U$ : если  $\forall x: U(n, x) = d^!(x)$ , подставим  $x = n$ , получим  $U(n, n) = U(n, n) + 1$ . Противоречие. ■

*Замечание.* Для класса частичных функций такое рассуждение не проходит, так как они могут быть не определены и прибавление единицы ничего не меняет для неопределенности.

**Теорема 2.3.3.** Существует вычислимая частичная функция, которая не имеет всюду определенного вычислимого продолжения <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>то есть нельзя доопределить до всюду определенной вычислимой

□ Подходит функция  $d^!(n) = U(n, n) + 1$ , где  $U$  — универсальная вычислимая функция <sup>1</sup>.

Пусть ее можно доопределить до вычислимой  $d''$ :

$$d'' = \begin{cases} U(n, n) + 1, & \text{такие } n, \text{ где } U(n, n) \text{ определена} \\ \text{определена,} & \text{где } U(n, n) \text{ не определена} \end{cases}$$

Поэтому  $d''$  отличается от всех сечений универсальной функции. Противоречие. ■

### 2.3.1 Перечислимое неразрешимое множество

Аналогично можно ввести определения для перечислимых множеств.

#### Определение 14: Сечение множества

**Сечением** множества  $W \subseteq \mathbb{N}^k$  назовем  $W_n = \{\bar{x} \mid (n, \bar{x}) \in W\}$ .

Докажем аналог прошлой теоремы для множеств.

**Теорема 2.3.4.** Существует перечислимое множество  $W^{(m)} \subset \mathbb{N}^{m+1}$ , являющееся универсальным для всех перечислимых подмножеств  $\mathbb{N}^m$ .

□ Рассмотрим универсальную функцию  $U^{(m)}$ . Пусть множество  $W^{(m)}$  — ее область определения, оно будет перечислимым.

Пусть у нас есть перечислимое множество  $X \in \mathbb{N}^m$ .

<sup>1</sup>далее это обозначение по умолчанию определяет универсальную вычислимую частичную функцию  $U^{(m+1)}$  для вычислимых частичных функций  $m$  аргументов

Найдем такую функцию  $f \in \mathcal{F}^m$ , для которой  $X$  — область определения, и такое  $n$ , что  $U_n = f$ .  
Тогда  $W_n = X$ . ■

**Теорема 2.3.5.** Существует перечислимое неразрешимое множество.

□ Рассмотрим вычислимую  $f(x)$ , не имеющую всюду определенного вычислимого продолжения.

Пусть  $F$  — ее область определения, она перечислима и неразрешима:

- $F$  перечислимо, потому что оно является областью определения вычислимой функции;
- $F$  неразрешимо, так как в противном случае можно рассмотреть общерекурсивное доопределение  $f$ :

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F \\ 0, & x \notin F \end{cases}$$

Эта функция всюду определена, вычислима, является продолжением  $f$ . Противоречие.

*Замечание.*  $F = \{n \mid U(n, n) \text{ определено}\}$  — переформулировка класса  $L_1$  (останавливающиеся на своем входе МТ).

*Замечание.*  $\bar{F}$  — пример непечислимого множества.

*Замечание.* Область определения универсальной функции перечислимо, но не разрешимое множество, так как область определения  $U(n, n)$  — частично определенная неразрешимая.

*Замечание.* «Проблема остановки»<sup>2</sup> — переформулировка принадлежности данной функции к области определения универсальной функции. ■

**Теорема 2.3.6.** Существует частичная вычислимая функция  $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ , которая не имеет всюду определенного вычислимого продолжения.

□ Определим

$$d'''(n) = \begin{cases} 1, & U(n, n) = 0 \\ 0, & U(n, n) > 0 \\ \uparrow, & U(n, n) \uparrow \end{cases}$$

Любое доопределение будет отличаться от  $U(n, n)$ , так как для всех  $n$  значения  $d'''(x)$  и  $U_n(x)$  различны: здесь либо обе функции расходятся, либо первое не равно второму. ■

### Определение 15

Непересекающиеся множества называются **отделимыми разрешимым**, если существует разрешимое множество, содержащее одно из них и непересекающееся с другим.

**Следствие 4.** Существуют перечислимые непересекающиеся неразделимые множества.

□ Подойдут следующие множества:  $X = \{n \mid d'''(n) = 0\}$  и  $Y = \{n \mid d'''(n) = 1\}$  Пусть существует разделяющее их разрешимое  $S$ , содержащее  $Y$  и непересекающееся с  $X$ .

Тогда  $\chi_S$  — общерекурсивное дополнение  $d'''$ . Противоречие. ■

## Лекция 4: †

### 2.3.2 Главные универсальные функции

<sup>2</sup>останавливается ли МТ  $M$  на входе  $x$

**Определение 16**

Пусть  $U^{(n+1)} \in \mathcal{F}^{n+1}$  универсальная нумерация для функций  $\mathcal{F}^n$ .

$U$  называется **главной нумерацией** или **главной универсальной функцией**, если для любой нумерации  $V \in \mathcal{F}^{n+1}$  существует **транслятор**  $s \in \mathcal{F}_*^a$ , такой что

$$\forall m \in \mathbb{N}, \bar{x} \in \mathbb{N}^n: V(m, \bar{x}) = U(s(m), \bar{x}).$$

<sup>a</sup>по номеру сечения  $V$  находит какой-то номер такого же сечения  $U$

**Теорема 2.3.7.** Существует главная универсальная функция  $U^{(n)} \in \mathcal{F}^{n+1}$  для класса  $\mathcal{F}^n$ .

□ По [следствию 3](#) существует  $T \in \mathcal{F}^{n+2}$ , универсальная для  $\mathcal{F}^{(n+1)}$ . Построим  $U$ :

- Определим  $U(x, \bar{y}) := T(l(x), r(x), \bar{y})$ .

Здесь, как обычно,  $c$  — канторовская нумерация,  $l, r$  — левая и правая обратные функции.

- Докажем, что  $U$  главная. Пусть  $V \in \mathcal{F}^{n+1}$  — некоторая функция. Так как  $T$  универсальная для содержащего  $V$  класса, существует  $m$  (номер функции  $V$  среди сечений  $T$ ), такой что

$$\forall x, \bar{y}: V(x, \bar{y}) = T(m, x, \bar{y}).$$

Проверим, что транслятор  $s(x) = c(m, x)$  подойдет, то есть  $V(x, \bar{y}) = U(s(x), \bar{y})$ .

$$\begin{aligned} U(s(x), \bar{y}) &= && \text{(По определению } U) \\ &= T(l(s(x)), r(s(x)), \bar{y}) && = T(l(c(m, x)), r(c(m, x)), \bar{y}) = \\ &= T(m, x, \bar{y}) && = V(x, \bar{y}) \end{aligned}$$

Значит,  $U$  главная. ■

Второе доказательство:

□ Аналогично мы строили универсальную функцию выше ([теорема 2.3.1](#) и [следствие 3](#)). Она и будет главной.<sup>3</sup> ■

**Теорема 2.3.8** (О вычислимости номера композиции). Пусть  $U \in \mathcal{F}^2$  — главная универсальная функция для  $\mathcal{F}$  тогда и только тогда, когда существует  $f \in \mathcal{F}_*^2$ , такая что

$$U_p \circ U_q = U_{f(p,q)}.$$

То есть  $\forall p, q, x \in \mathbb{N}: U(p, U(q, x)) = U(f(p, q), x)$ .

□

**1  $\implies$  2** Пусть  $U$  — главная.

Рассмотрим  $V(n, x) = U(l(n), U(r(n), x))$ , то есть  $V(c(p, q), x) = U(p, U(q, x))$ .

Фактически  $V$  — это  $U_q \circ U_p$ . Так как  $U$  — главная универсальная,

$$\exists s \in \mathcal{F}_*: V(n, x) = U(s(n), x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} U_p \circ U_q &= U(p, U(q, x)) = V(c(p, q), x) = \\ &= U(s(c(p, q)), x) = U_{s(c(p, q))}(x) \end{aligned} \quad \text{(По определению транслятора)}$$

Теперь обозначим  $f(p, q) = s(c(p, q))$  и получим нужное равенство.

<sup>3</sup>Здесь можно было бы и расписать подробно.

2  $\Rightarrow$  1

□ Пусть есть такая функция  $f(p, q)$ , что  $U_p \circ U_q = U_{f(p,q)}$ . Хотим доказать, что  $U$  главная.

- Найдем транслятор для канторовской нумерации  $t \in \mathcal{F}$ :  $\forall n, x \in \mathbb{N} \quad U(t(n), x) = c(n, x)$ .  
TODO: дописать
- Построим транслятор для любой функции  $V \in \mathcal{F}^2$ . Пусть  $g(y) = V(l(y), r(y))$ . Так как  $U$  универсальная, есть сечение  $U_a = g$ . Подставим  $c(n, x)$ :

$$U_a(c(n, x)) = g(c(n, x)) = V_n(x).$$

Выразим  $c(n, x)$  через  $U$  с помощью транслятора  $t$ :

$$\begin{aligned} U_a(U(t(n), x)) &= U_a \circ U_{t(n)}(x) = V_n(x) \\ \parallel \\ U_{f(a, t(n))}(x) &= V_n(x) \end{aligned}$$

Тогда  $s(n) = f(a, t(n))$  — нужный транслятор для  $V$ . ■

### 2.3.3 Теорема Райса

#### Определение 17: Свойство функций

**Свойство**  $\mathcal{A}$  функций класса  $\mathcal{C}$  — подмножество функций, удовлетворяющих этому свойству, то есть лежащих в  $\mathcal{A}$ .

**Нетривиальное свойство** — не пустое и не совпадающее со всем классом:  $\emptyset \subsetneq \mathcal{A} \subsetneq \mathcal{C}$ .

**Теорема 2.3.9** (Райса / Успенского). Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$  — некоторое нетривиальное свойство вычислимой функции,  $U$  — главная универсальная функция для всех вычислимых функций класса  $\mathcal{F}$ .

Тогда не существует алгоритма, который по  $U$ -номеру вычислимой функции проверяет  $\mathcal{A}$ .

То есть множество  $A = \{n \mid U_n \in \mathcal{A}\}$  неразрешимо.

□ Покажем, что, если свойство  $\mathcal{A}$  можно алгоритмически проверить, то любые два непересекающихся перечислимых множества можно отделить некоторым разрешимым.

Пусть  $P$  и  $Q$  — произвольные непересекающиеся множества.

$\xi$  — какая-нибудь функция из  $\mathcal{A}$ , а  $\eta$  — какая-нибудь не из  $\mathcal{A}$ .

Рассмотрим следующую функцию:

$$V(n, x) = \begin{cases} \xi(x), & x \in P \wedge x \notin Q \\ \eta(x), & x \in Q \wedge x \notin P \\ \uparrow, & n \notin P \cup Q \end{cases}$$

Заметим, что  $V$  вычислима, так как можем запустить по шагам алгоритмы для  $P$  и  $Q$ , если один из них завершается, то остается вычислить соответствующую функцию, а иначе значение не определено.

Так как  $V$  вычислима, а  $U$  универсальна, существует транслятор  $s \in \mathcal{F}_*$ :

$$U(s(n), x) = V(n, x).$$

Теперь для любого с помощью проверки  $V_n(x) \in \mathcal{A}$  можем отделить  $P$  от  $Q$ . Получаем противоречие со следствием 4. ■



**Следствие 5.** Множество номеров некоторой заданной функции  $\varphi$  в главной нумерации неразрешимо. В частности, в главной нумерации множество МТ, вычисляющих одну функцию, бесконечно много.

**Следствие 6** (Пример универсальной неглавной функции). Существует универсальная для класса  $\mathcal{F}^n$ , но неглавная функция  $V \in \mathcal{F}^{n+1}$ .

□ Пусть  $U(n, x)$  — произвольная главная универсальная функция и  $D$  — множества номеров функций в  $U$  с непустой областью определения.

Заметим, что  $D$  перечислимое, так как можно построить следующий алгоритм: на шаге  $k$  будем для  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  и  $\bar{j} \in \{0, 1, \dots, k-1\}^n$  считать  $U_i(\bar{j})$ . Для этого даем на каждой из  $k^{n+1}$  машин Тьюринга поработать  $n$  шагов. Теперь для всех пар  $(i, \bar{j})$ , на которых был выдан результат, выводим  $i$ . Для любой функции  $U_i$  с непустой областью определения рано или поздно найдется  $n$ , которое больше номера функции и координат какой-то точки из области определения.

Рассмотрим функцию

$$V(i, \bar{x}) = \begin{cases} \uparrow, & i = 0 \\ U(f(i-1), \bar{x}), & i \neq 0 \end{cases}$$

Эта функция вычислима, универсальна, единственный номер нигде не определенного сечения — только 0, это множество конечно, следовательно разрешимо, поэтому  $V$  неглавная по [прошлому следствию](#).

■

**Следствие 7** (Переформулировка прошлого следствия). Для любой главной нумерации  $U$  и любой вычислимой функции  $f$  множество  $\{n \mid U_n = f\}$  неразрешимо.

## 2.4 Теорема о неподвижной точке

**Лемма 3.** Пусть  $\equiv$  — отношение эквивалентности на  $\mathbb{N}$ .

Тогда следующие утверждения *не* выполняются одновременно:

1. Для любой  $f \in \mathcal{F}$  существует  $\equiv$ -продолжение  $g \in \mathcal{F}_*$ <sup>a</sup>.
2. Найдется  $h \in \mathcal{F}_*$ , не имеющая  $\equiv$ -неподвижной точки, то есть  $\forall n: n \not\equiv h(n)$ .

<sup>a</sup>То есть, если  $f(x)$  определена, то  $g(x)$  тоже определена и  $g(x) \equiv f(x)$

□ Рассмотрим  $f \in \mathcal{F}$ , от которой никакая вычислимая функция не может отличаться всюду, например,  $f(x) = U(x, x)$ .

Пусть выполняются оба пункта.

1. По первому существует  $\equiv$ -продолжение  $f$  функция  $g \in \mathcal{F}_*$ .
2. По второму существует такая  $h \in \mathcal{F}_*$ , что  $\forall n: h(n) \not\equiv n$ .

Рассмотрим  $t(x) := h(g(x))$  и проверим, что она всюду отличается от  $f$ :

- Если  $f$  определена, то  $f(x) \equiv g(x) \not\equiv h(g(x)) = t(x)$
- Если  $f$  не определена, то  $t$  определена

Но от  $f$  никакая вычислимая функция не может отличаться всюду.

■

**Теорема 2.4.1** (О неподвижной точке). Если  $U$  — главная универсальная вычислимая функция для класса  $\mathcal{F}$ , а  $h \in \mathcal{F}_*$ , то  $\exists n: U_n = U_{h(n)}$ .

□ Возьмем в качестве отношения эквивалентности следующее:  $x \equiv y \iff U_x = U_y$ .

Покажем, что выполняется первый пункт из [леммы 3](#).

Пусть  $f \in \mathcal{F}$ . Тогда можем рассмотреть  $V(n, x) := U(f(n), x)$ .

Так как  $U$  главная существует транслятор:

$$\exists s \in \mathcal{F}^*: \forall n, x \ V(n, x) = U(s(n), x).$$

Проверим, что  $s$  и есть  $\equiv$ -продолжение  $f$

- если  $f(n)$  определена, то  $U_{s(n)} = U_{f(n)}$ , то есть  $s(n) \equiv f(n)$ .
- если не определена, то и  $U_{s(n)}$  нигде не определена.

В итоге первый пункт [леммы](#) выполняется, поэтому второй не выполняется. ■

**Следствие 8.**  $U(n, x)$  — главная универсальная вычислимая функция. Тогда

$$\exists p \in \mathbb{N}: \forall x \ U(p, x) = p.$$

□ Рассмотрим  $V \in \mathcal{F}^2$ , такую что  $V(n, x) = n$ . Тогда существует  $s(n)$ , такое что  $U_{s(n)} = V_n = n$ .

Теперь применим теорему о неподвижной точке к  $s(n)$ :

$$\exists p: U_p = U_{s(p)} = V_p = p.$$

■

## 2.5 $m$ -сводимость

### Определение 18: $m$ -сводимость

Множество  $A \subset \mathbb{N}$   $m$ -**сводится** ( $A \leq_m B$ ) к  $B \subset \mathbb{N}$ , если существует  $f \in \mathcal{F}_*$ , такая что

$$\forall x \in \mathbb{N}: x \in A \iff f(x) \in B.$$

**Свойства.**

- Если  $A \leq_m B$  и  $B$  разрешимо, то  $A$  разрешимо.
- Если  $A \leq_m B$  и  $B$  перечислимо, то  $A$  перечислимо.
- Отношение  $\leq_m$  рефлексивно и транзитивно.
- Если  $A \leq_m B$ , то  $\mathbb{N} \setminus A \leq_m \mathbb{N} \setminus B$ .

□

- Чтобы проверить  $x \stackrel{?}{\in} A$ , проверим  $f(x) \in B$ . Так как  $B$  разрешимо, вторая проверка выдаст какой-то ответ и мы можем его вернуть.
- Аналогично, если  $f(x) \in B$ , то  $x \in A$ , а если расходится, то  $x \notin A$ .

- Для рефлексивности подойдет  $f = \text{id}$ , для транзитивности берем композицию.
- Инвертируем результат:

$$x \in \mathbb{N} \setminus A \iff x \notin A \iff f(x) \notin B \iff f(x) \in \mathbb{N} \setminus B.$$



*Замечание.* Разрешимое множество сводится к любому  $B \notin \{\infty, \mathbb{N}\}$

*Замечание.* К пустому множеству сводится только пустое. к  $\mathbb{N}$  сводится только  $\mathbb{N}$ .

### Определение 19: $m$ -полнота

Перечислимое множество  $A$  называется  **$m$ -полным** (в классе перечислимых множеств), если любое перечислимое  $B$   $m$ -сводится к  $A$ .

**Теорема 2.5.1.** Существует  $m$ -полное перечислимое множество.