Конспект по теории вычислимости
IV семестр, 2021 год
Современное программирование, факультет математики и компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Пузыниной Светланы Александровны)

Тамарин Вячеслав

February 13, 2021

Contents

Исходный код на https://github.com/tamarinvs19/theory_university

Некоторые доказательства были опущены на лекции, но написаны мной. Они выделены оранжевыми символами:

□ Исправляйте, дополняйте, меняйте. Чем меньше недоказанных утверждений, тем лучше! ■

Index

Chapter 1

Частичные рекурсивные функции.

1.1 Система вычислимости по Клини

Лекция 1: †

11 feb

Определение 1

Пусть функция $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Такая функция называется k-**местной частичной функцией**. Если $k = 0$, то $f = \mathrm{const}$.

1.1.1 Простейшие функции

Простейшими будем называть следующие функции:

- Нуль местный нуль — функция без аргументов, возвращающая 0;
- Одноместный нуль — $0(x) = 0$;
- Функция следования — $s(x) = x + 1$;
- Функция выбора (проекция) — $I_n^m(x_1, \ldots x_n) = x_m$

1.1.2 Операторы

Определение 2

Функция f **получается оператором суперпозиции** из функций h и g, где

$$h(y_1, \ldots, y_m),\ g_i(x_1, \ldots, x_n);\ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

если

$$f = h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots g_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Оператор обозначается **S**.

Определение 3

Функция $f^{(n+1)}$[a] **получается оператором примитивной рекурсией** из $g^{(n)}$ и $h^{(n+2)}$, если

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots x_n, 0) = g(x_1, \ldots x_n) \\ f(x_1, \ldots x_n, y+1) = h(x_1, \ldots x_n, y, f(x_1, \ldots x_n, y)) \end{cases}$$

Оператор обозначается **R**.

[a]Здесь и далее $f^{(n)}$ обозначается функция, принимающая n аргументов, то есть n-местная

Определение 4: Примитивно рекурсивная функция

Функция f называется **примитивно рекурсивной** (**ПРФ**), если существует последовательность $f_1, \dots f_k$ такая, что все f_i либо простейшие, либо получены из предыдущих $f_1, \dots f_{i-1}$ с помощью одного из операторов **S** и **R** и $f = f_k$.

Пример 1.1.1. Докажем, что $f(x, y) = x + y$ — **ПРФ**. По **R** можем получить f так:

$$\begin{cases} f(x,0) & = x = I_1^1(x) = g \\ f(x,y+1) & = (x+y)+1 = s(f(x,y)) = \mathbf{S}(I_3^3(x,y,f(x,y)) = h \end{cases}.$$

Теперь построим последовательность функций f_i, где последним элементом будет f, полученный с помощью **R**:

$$I_1^1,\ s,\ I_3^3,\ h = \mathbf{S}(s, I_3^3),\ f.$$

Лемма 1. Следующие функции являются **ПРФ**:

1. $\mathrm{const}^{(n)}$
2. $x + y$
3. $x \cdot y$
4. x^y, где 0^0 можем определить, как хотим
5. $\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$
6. $\overline{\mathrm{sg}}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$
7. $x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases}$
8. $x \dot{-} y = \begin{cases} 0 & x < y \\ x - y & else \end{cases}$
9. $|x - y|$

□

1. Сначала можем получить нужное число последовательной суперпозицией функции следования (получили константу от одной переменной), затем проецируем I_1^n, чтобы получить n переменных.
2. Доказали выше в примере 1.1.1.
3. $f(x, y) = xy$ определим так:
$$\begin{cases} f(x,0) & = 0 \\ f(x,y+1) & = f(x,y) + x \end{cases}$$
а складывать мы умеем.

4. $f(x,y) = x^y$:

$$\begin{cases} f(x,0) & = 1 = s(0) \\ f(x,y+1) & = f(x,y) * y \end{cases}$$

Умножать тоже можно по пролому пункту.

5. $\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \mathrm{sg}(0) & = 0 \\ \mathrm{sg}(x+1) & = 1 = s(0) \end{cases}$$

6. Аналогично

7. $f(x) = x \dot{-} 1$

$$\begin{cases} f(0) & = 0 \\ f(x+1) & = x = I_1^1(x) \end{cases}$$

8. $f(x,y) = x \dot{-} y$

$$\begin{cases} f(x,0) & = x = I_1^1(x) \\ f(x,y+1) & = f(x,y) \dot{-} 1 \end{cases}$$

9. $f(x,y) = |x-y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$

Замечание. Обычное вычитание на является **ПРФ**, так как не везде определено на $\mathbb{N}$.

Определение 5: Оператор минимизации

Функция f задается **оператором минимизации** (**M**), если она получается из функции g следующим образом:

$$f(x_1,\dots x_n) = \mu y\big[g(x_1,\dots x_n,y) = 0\big] =$$

$$= \begin{cases} y & g(x_1,\dots x_n,y) = 0 \land g(x_1,\dots x_n,i)^a \neq 0 \ \forall i < y \\ \uparrow^{\,b} & else \end{cases}$$

[a]подразумевается, что функция определена в этих точках
[b]не определена

Пример 1.1.2.

$$x - y = \begin{cases} x - y, & x \geqslant y \\ \uparrow, & x < y \end{cases}$$

Можно задать по другому, чтобы g была **ПРФ**:

$$x - y = \mu y[|(x+z) - y| = 0].$$

Определение 6: Частично рекурсивная функция

Функция f называется **частично рекурсивной функцией** (**ЧРФ**), если существует последовательность функций $f_1,\dots f_k$, таких что f_i либо простейшая, либо получается из предыдущих с помощью одного из операторов **S**, **R**, **M**.

Замечание. Частично рекурсивная функция может быть не везде определена. Но примитивно рекурсивная определена везде.

Замечание. Существуют частично рекурсивные функции, которые всюду определены, но при этом не являются **ПРФ**.

Определение 7

Общерекурсивная функция — всюду определенная частично рекурсивная.

Пример 1.1.3. $\mu y[x+y+1=0]$ — нигде не определена, но получается из последовательности других функций с помощью операторов.

Определение 8: Оператор ограниченной минимизации

Функция $f^{(n)}$ задается **оператором ограниченной минимизации** из функций $g^{(n+1)}$ и $h^{(n)}$, если

$$\mu y \leqslant h(\overline{x})[g(\overline{x}, y) = 0]^{a}.$$

Это означает, что

$$f(\overline{x}) = \begin{cases} y & g(\overline{x}, y) = 0 \land y \leqslant h(\overline{x}) \land g(\overline{x}, i) \neq 0^{b}\ \forall i < y \\ h(\overline{x}) + 1 & else \end{cases}.$$

[a] Здесь и далее $\overline{x} = x_1, \dots x_n$.

[b] Аналогично, подразумевается, что функция определена в этих точках

Утверждение. Пусть g, h — примитивно рекурсивные функции, f получается из g и h с помощью ограниченной минимизации, то f тоже **ПРФ**.

□ Пока без доказательства. Основная идея — нет неопределенности. ■

Замечание. $0(x)$ можно исключить из определения простейших функций, так как она получается с помощью **R** для нульмерного 0 и $I_2^2(x, y)$:

$$0(y) = \begin{cases} 0(0) & = 0 \\ 0(y+1) & = I_2^2(y, 0) \end{cases}$$

Определение 9

Предикат — условие задающее подмножество: $R \subset \mathbb{N}^k$.

Предикат называется **примитивно рекурсивным (общерекурсивным)**, его характеристическая функция примитивно рекурсивная (общерекурсивная).

$$\chi_R(\overline{x}) = \begin{cases} 1, & \overline{x} \in R \\ 0, & \overline{x} \notin R \end{cases}.$$

Утверждение.

- Если R, Q — примитивно рекурсивные (общерекурсивные) предикаты, то $P \lor Q,\ P \land Q,\ P \to Q, \neg P$ тоже примитивно рекурсивные (общерекурсивные).
- Предикаты $=,\ \leqslant,\ \geqslant,\ <,\ >$ тоже примитивно и общерекурсивны.

□

- Проверим, что характеристические функции примитивно / общерекурсивны:

$$\begin{aligned} \chi_{P\lor Q}(\overline{x}) &= \chi_P(\overline{x}) \cdot \chi_Q(\overline{x}) \\ \chi_{P\land Q}(\overline{x}) &= \mathrm{sg}(\chi_P(\overline{x}) + \chi_Q(\overline{x})) \\ \chi_{P\to Q}(\overline{x}) &= \overline{\mathrm{sg}}(\chi_P(\overline{x}) + \overline{\mathrm{sg}}(\chi_Q(\overline{x}))) \\ \chi_{\neg P}(\overline{x}) &= \overline{\mathrm{sg}}(\chi_P(\overline{x})) \end{aligned}$$

- Аналогично выразим, через простейшие:

$$\chi_{x=y}(x) = \overline{\text{sg}}(|x-y|) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

$$\chi_{x<y}(x) = \text{sg}(x \dot{-} y)$$

Остальные можем выразить также или через уже проверенные $<$ и $\neg$.

Лемма 2. Следующие функции являются примитивно рекурсивными:

1. $\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$, считаем, что $\left\lfloor \frac{x}{0} \right\rfloor = x$
2. $\text{Div}(x,y) = \begin{cases} 1, & y \mid x \\ 0, & else \end{cases}$
3. $\text{Prime}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{P} \\ 0, & else \end{cases}$
4. $f(x) = p_x$, где p_x — x-тое простое число, $p_0 \coloneqq 2$
5. $\text{ex}(i,x)$ — степень простого числа p_i разложении x, $\text{ex}(i,0) \coloneqq 0$

1. $f(x,y) = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$. Найдем минимальное k, что $f'(x,y,k) = yk > x$. Чтобы получить $f(x,y) = \min(k \mid f'(x,y,k)) - 1$. Используем оператор минимизации:

$$f(x,y) = \mu k[\neg f'(x,y,k) = 0] - 1.$$

2. $\text{Div}(x,y) = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \cdot y = x$

3. Определим $\text{Div}'(x,y) = (y \leqslant 1) \vee (\neg \text{Div}(x,y))$, эта функция проверяет, что y не является нетривиальным делителем x.

   Теперь, используя ограниченную минимизацию, выразим $\text{Prime}(x)$:

$$\text{Prime}(x) = \Big(\mu y \leqslant h(x)[\text{Div}'(x,y) = 0]\Big) = x, \text{ где } h(x) = x - 1.$$

   То есть мы посмотрели на все меньшие числа, если среди них найдется нетривиальный делитель, то число не простое.

4. Пусть $f'(x) =$ количество простых $\leqslant x$.

$$\begin{cases} f'(0) & = 0 \\ f'(x+1) & = \text{Prime}(x+1) + f(x) \end{cases}$$

   Теперь можно вычислить $f(x)$: для этого определим функцию $g(x,y) = (f'(y) = x)$,

$$f(x) = \mu y[\neg f'(x,y) = 0].$$

5. Чтобы найти степень вхождения простого числа p_i в x, сначала находим это простое число по номеру, затем находим минимальное k, что x не делится на p_i^k и вычитаем единицу.

Теорема 1.1.1 (Канторовская нумерация). Пусть $\pi\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$:

$$\pi(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1)+y.$$

- Тогда для любого z существует единственное представление $z=\pi(x,y)$.
- Причем функции $x(z), y(z)$ примитивно рекурсивные.

□

- Запишем $\pi(x,y)=\binom{x+y}{2}+y$. Заметим, что для $n>m$ верно

$$\binom{n}{2}-\binom{m}{2}\geqslant\binom{n}{2}-\binom{n-1}{2}=n-1.$$

Предположим, что $x+y>x'+y'$ и $\pi(x,y)=\pi(x',y')$. Тогда

$$y'-y=\binom{x+y}{2}-\binom{x'+y'}{2}\geqslant x+y-1\geqslant x'+y'.$$

Но $y\geqslant 0,\ x'\geqslant 0$, поэтому единственный возможный вариант, когда они равны нулю, а $x+y=x'+y'+1$. Проверим на равенство $\pi(x,y)$ и $\pi(x',y')$:

$$\pi(x,y)=\frac{1}{2}x(x+1)=\frac{1}{2}(y'+1)(y'+2)=\frac{1}{2}y'(y'+1)+y'+1$$
$$\pi(x',y')=\frac{1}{2}y'(y'+1)+y'$$

Равенства нет.

- Можно по-честному все посчитать и выразить $x(z),\ y(z)$. Пусть

$$w=x+y$$
$$t=\frac{1}{2}w(w+1)=\frac{w^2+w}{2}$$
$$z=t+y$$

Решим квадратное уравнение, чтобы выразить w через t (отрицательный корень можем сразу отбросить):

$$w=\frac{-1+\sqrt{8t+1}}{2}.$$

Запишем неравенство:

$$t\leqslant z=t+y<t+(w+1)=\frac{(w+1)^2+(w+1)}{2}.$$

Отсюда

$$w\leqslant\frac{-1+\sqrt{8z+1}}{2}<w+1.$$

Тогда

$$w=\left\lfloor\frac{-1+\sqrt{8z+1}}{2}\right\rfloor$$
$$t=\frac{w^2+w}{2}$$
$$y=z-t$$
$$x=w-y$$

Таким образом, мы выразили через z обе координаты. Единственный момент — нужно извлекать корень, в натуральную степень возводить мы умеем, поэтому можем с помощью ограниченной минимизации перебрать все меньшие числа, возвести их в квадрат и сравнить с нашим числом.

Теорема 1.1.2 (Возвратная рекурсия). Зафиксируем s. Пусть

$$\begin{cases} f(\overline{x},0) & = g(x) \\ f(\overline{x},y+1) & = h(\overline{x},y,f(\overline{x},t_1(y)),\dots f(\overline{x},t_s(y))) \end{cases}$$

где $t_i(g) \leqslant y\ \forall 1 \leqslant i \leqslant s, g^{(n)}, h^{(n+1+s)}, t_i^{(1)}$.
Тогда, если g, h, t_i — примитивно / общерекурсивные, то и f тоже.

☐ Пока без доказательства.

Теорема 1.1.3 (Совместная рекурсия). Пусть f_i, $1 \leqslant i \leqslant k$ — рекурсии,

$$\begin{cases} f_i(\overline{x},0) & = g_i(\overline{x}) \\ f_i(\overline{x},y+1) & = h_i(\overline{x},y,f_1(\overline{x},y),\dots f_k(\overline{x},y)) \end{cases}$$

Если g_i, h_i, $1 \leqslant i \leqslant k$ — примитивно / общерекурсивные, то f_i тоже.

☐ Пока без доказательства. Полезно использовать канторову нумерацию.

Теорема 1.1.4 (Кусочное задание функции). Пусть $R_0, \dots R_k$ — отношения, такие что $\bigcup\limits_{i=0}^{k} R_i = \mathbb{N}$ и для $i \neq j$ верно $R_i \cap R_j = \varnothing$. Для $|\overline{x}| = n$:

$$f(\overline{x}) = \begin{cases} f_0(\overline{x}) & \text{если } R_0(\overline{x}) \\ f_1(\overline{x}) & \text{если } R_1(\overline{x}) \\ \vdots & \vdots \\ f_k(\overline{x}) & \text{если } R_k(\overline{x}) \end{cases}$$

Если f_i, R_i — примитивно / общерекурсивны, то и f тоже.

☐ Пока без доказательства.

Теорема 1.1.5. Функция вычисляется машиной Тьюринга тогда и только тогда, когда она частично рекурсивная.

☐ Если $f(x_1, \dots x_n) = y$, то считаем, что МТ получаем $1^{x_1}01^{x_2}0\dots01^{x_n}$ и должна выдать 1^y; если f не определена, МТ должна зацикливаться и наоборот.

$\boxed{2 \Longrightarrow 1}$

- Для простых функций можем построить МТ напрямую.
- Для операторов $\mathbf{S}, \mathbf{R}, \mathbf{M}$:

  S: Пусть есть набор функций $h^{(n)}$, $g_1^{(m)}, \dots, g_n^{(m)} \longrightarrow f^{(m)}$, для каждой из которых есть машина Тьюринга M_h и M_{g_i}.
  Хотим построить МТ M_S для S.
  Сделаем это так:

– Копируем весь вход n раз:
$$\left(1^{x_1}01^{x_2}\dots01^{x_n}*\right)^n.$$
– Запускаем M_{g_i} на соответствующей части полученного входа.
Если нужно что-то записать, то будем сдвигать всю правую часть на нужное число клеток, чтобы освободить для место.
МТ запускаем псведопараллельно (по очереди даем поработать).
В каждой часть после окончания работы оставляем только ответ:
$$1^{y_1} * 1^{y_2} \dots * 1^{y_n},$$
где $y_i = g_i(x_1, \dots x_m)$.
– Запускаем на этом результате M_h.

R:

M:

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$

■