

Sieve of Eratosthenes

🕒 작성일시	@2022년 8월 3일 오후 5:52
▼ 강의 번호	
▼ 유형	
▼ 강사	
🔗 자료	
☑ 복습	<input type="checkbox"/>
📅 날짜	@2022년 8월 3일

알고리즘

에라토스테네스의 체 (Sieve of Eratosthenes)

소수(prime number)를 찾아내는 알고리즘

2이상의 정수에서 1과 그 수 자체로만 나눌수 있는 수
(소수는 나열되어있는 구간이 불규칙하므로 임의로 찾기가 힘들다.)

소수 prime number

소수는 2 이상의 정수 중에서 1과 그 수 자신 외는 나눌 수 없는 숫자.

10 이하에서는 2, 3, 5, 7이 소수에 해당한다.

(4는 2와 2, 6은 2와 3으로 나누기 가능...) ← 이러한 숫자들은 합성 수라고 한다,
합성수가 아닌 숫자들이 바로 소수이다.



“소수인지 아닌지 구분하는 것은 의외로 어렵다.”

소수의 내용만 보면 어렵지 않아보이지만, 아주 어렵다. 무엇이 어려운지 바로 찾아내기도 힘들다.

예로 3의 배수 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24... 처럼 3개의 간격으로 나타낸다. 따라서 1에서 100까지의 3의 배수를 찾는 것은 아주 간단하다. 하지만 소수는 규칙성이 없기때문에 간격이 불규칙하고 랜덤하다.

그러면 어떻게 구할수 있을까. 가장 먼저 떠오르는 방법은 하나하나 그 수보다 작은 숫자로 나누어보고 나눌수 있는지의 여부를 확인하는 것이다. 2에서 100까지의 소수를 찾으려면 먼저 2로 나눌수 있는 수를 모두 지우고 그 다음 3으로 나눌수 있는 숫자를 모두 지우고 그 다음 4로 나눌수 있는 수를 모두 지우고마지막에는 99로 나눌수 있는 수를 지우는 방법이다. 하지만 이 방법은 비효율적이고 수의 범위가 커지는 경우에는 많은 시간이 소모될 것이다.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

고대 그리스 과학자인 에라토스테네스는 위의 방법을 개선 하여 소수를 효율적으로 발견하는 방법을 알아냈다. 그의 이름을 따서 ‘에라토스테네스의 체’ 라고 부른다.

어떤수 이하의 범위에 존재하는 소수를 찾고 싶은 경우



‘그 수의 제곱근보다 작은 소수의 배수만 없애면 남은수는 소수다.’

라는 생각을 바탕으로 소수를 찾는 방법이다.

100이하의 소수를 찾으려면, 100의 제곱근 이하소수를 선택한다.

$$\sqrt{100} = 10$$

우선 2~100 까지 표에서 2를 제외한 2의 배수 모두를 삭제한다.

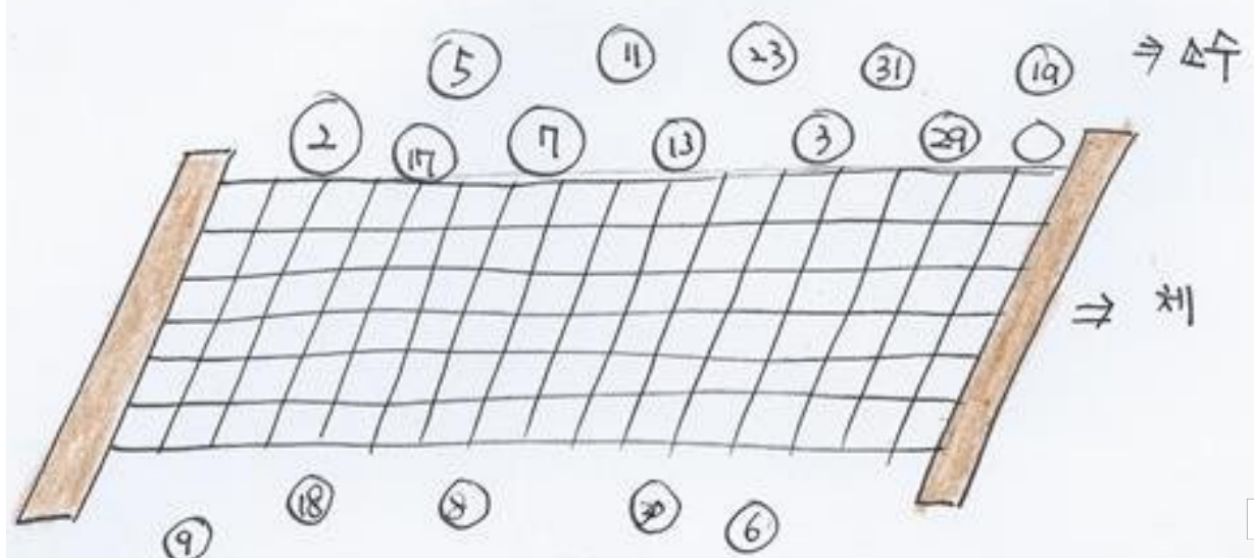
	2	3		5		7		9	
11		13		15		17		19	
21		23		25		27		29	
31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49	
51		53		55		57		59	
61		63		65		67		69	
71		73		75		77		79	
81		83		85		87		89	
91		93		95		97		99	

이런 방식으로 3보다 큰수에 대해서도 $n \times n$ 에 대해 지워주면 된다.

	2	3		5		7		
11		13				17		19
		23		25				29
31				35		37		
41		43				47		49
		53		55				59
61				65		67		
71		73				77		79
		83		85				89
91				95		97		

같은 방식으로 5와 7의 배수들도 모두 삭제 한 결과는 아래와 같다.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



이 방법을 사용하면 1에서 100까지의 모든 숫자를 해당 숫자보다 작은수로 나눌수 있는 지 하나 하나 전부 순서대로 확인하는 것보다는 훨씬 더 빨리 소수를 찾을 수 있다.

에라토스테네스의 체 알고리즘

크게 3가지의 처리로 구성한다.

1. 어떤 수 이하의 모든 정수데이터를 준비
2. 어떤 수의 제곱근보다 작은 소수의 배수들을 차례로 제거
3. 마지막 까지 남은수들을 출력한다.

우선 10이하의 소수를 구하는 경우 ,

1. 10이하의 정수 데이터를 준비한다. 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 (정수데이터)
2. $\sqrt{10}$, 약 3.16 보다 작은 소수의배수를 차례로 구한다.
3. 마지막까지 남은 수들을 출력한다.

• 10이하의 정수 데이터를 준비한다. 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 (정수데이터)

- 먼저 체의 대상이 되는 10까지의 정수를 데이터로 준비한다. 여기서는 11개의 요소를 가지는 정수형 배열을 준비한다. 배열 이름은 arr, 0부터 시작해서 첨자를 10까

지 동일하게 요소 11개 준비

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- 요소는 '그 첨자가 소수인지 여부를 판정하는 데이터를 넣는것으로 사용한다. 즉, 소수가 아닌것으로 판정된 첨자의 요소에는 소수가 아니라는 것을 나타내는 데이터를 넣는다. 소수의 가능성이 있는 경우에는 1을 대입하고 아닌경우 0을 대입한다.
- 우;에서의 개념소개에서는 소수가 아닌 수를 제거하는 방식을 0을 대입하는 방식으로 처리한다. 따라서 초기값을 1로 전부 대입 해둔다, 그리고 소수가 아니라고 잔정된수 (첨창)의 요소에는 0을 집어 넣는다.
- 이로써 0을 대입한 마지막 '1'이 남아있는 요소들의 첨자는 모두 소수이고

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- $\sqrt{10}$, 약 3.16 보다 작은 소수의배수를 차례로 구한다.

10의 제곱근은 약 3.16...이므로 제곱근 이하의 소수는 2와 3이다. 따라서 2의 배수들 모두와 3의 배수들 모두를 제거하면 된다.

먼저 2의 배수들을 모두 지운다. 이때 지운다의 의미를 0을 대입한다는 표현으로 적용한다.

1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

그 후 3의 배수를 제거한다.

1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- **마지막까지 남은 수들을 출력한다.**

제공된 이하의 소수들의 모든 배수를 제거(0으로 대입)했다면 나머지는 모두 소수뿐이다.
(여전히 요소의 값이 1인) 그럼 이제 첨자가 2 이상이고 1이 들어있는 요소의 첨자들만 뽑아내면 그것들이 바로 10이하의 소수가 된다.

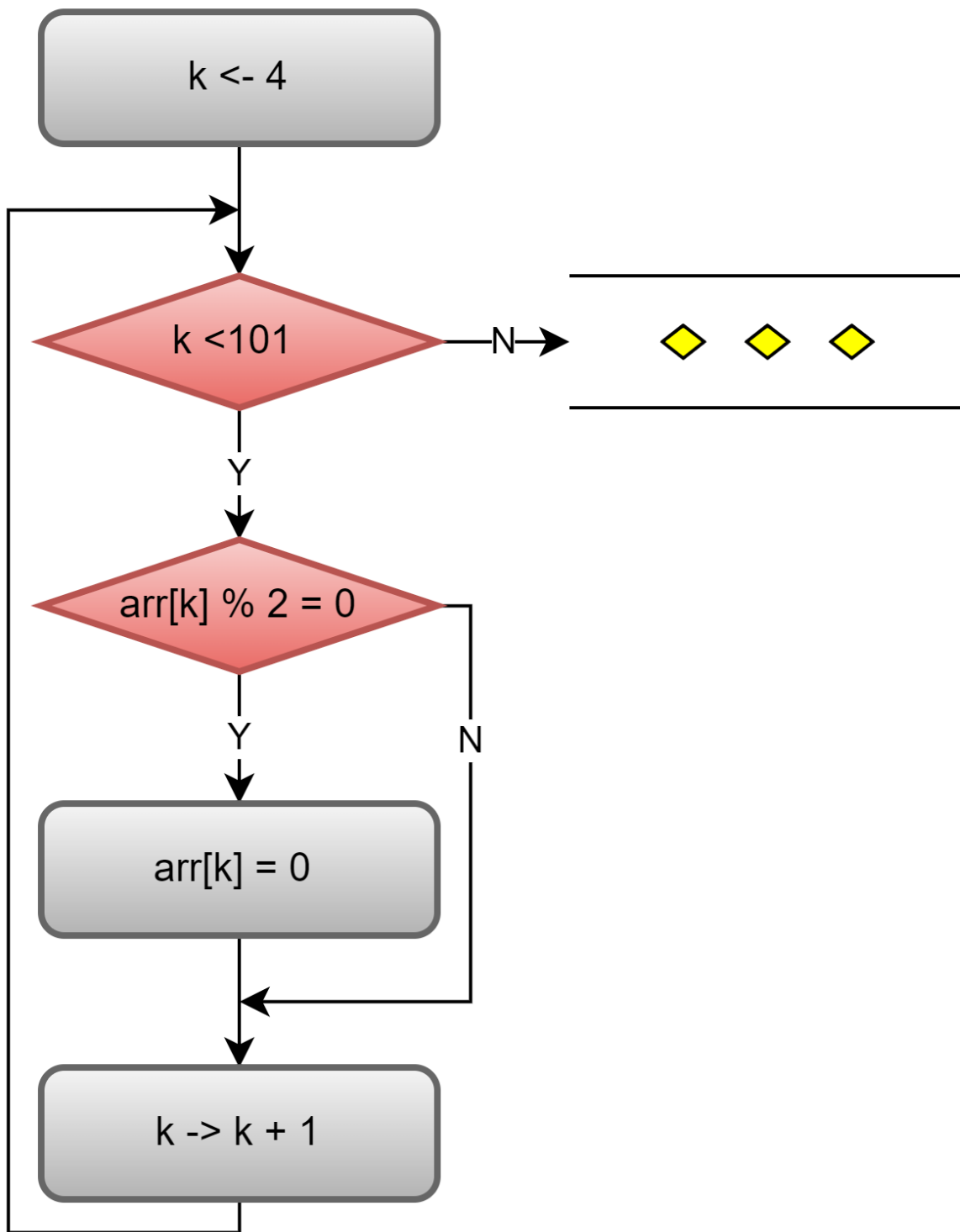
1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Flow Chart

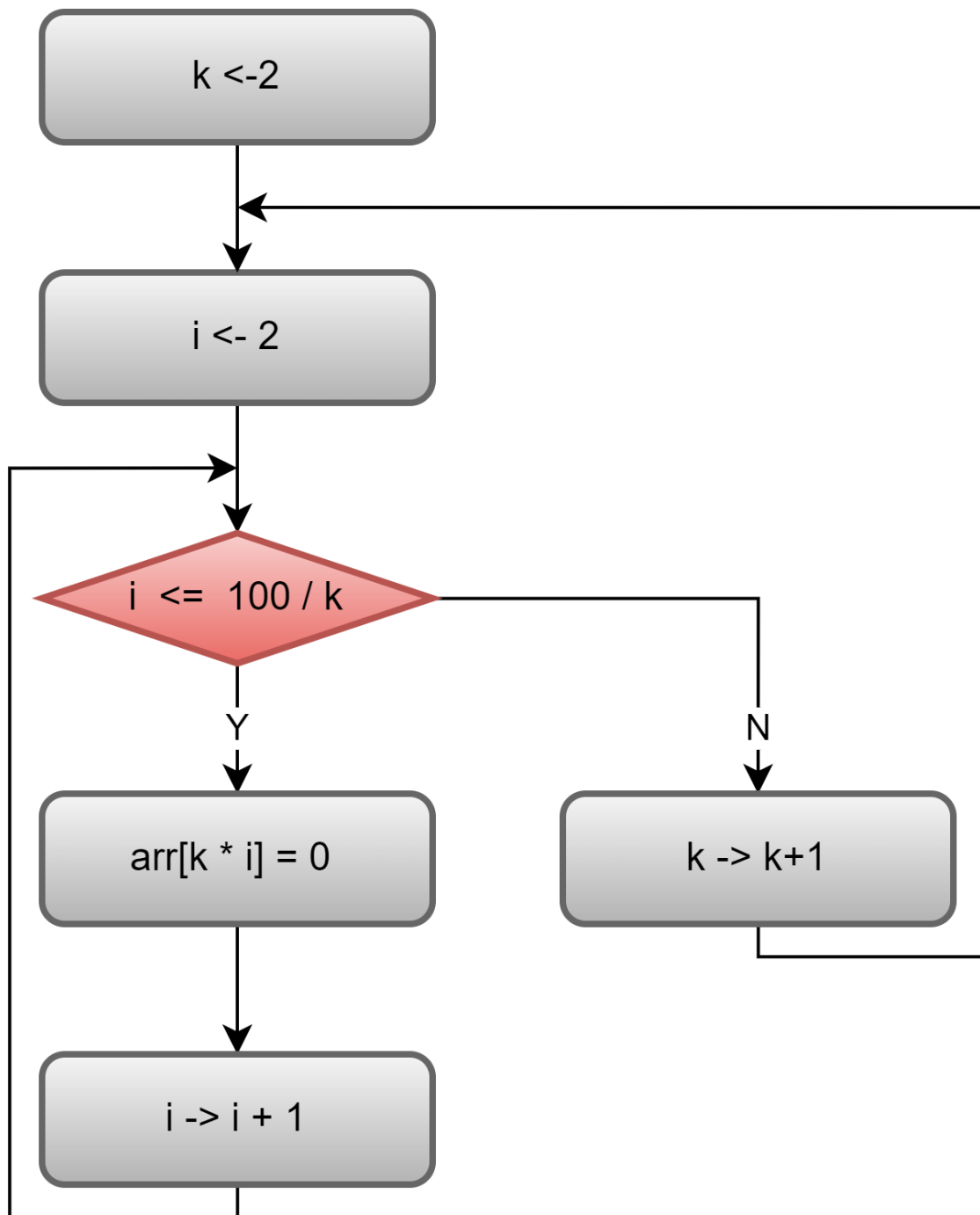
100이하의 소수를 모두구하는 경우를 생각해본다.

따라서 배열의 요소수는 101이다.

1. 정수데이터 준비



2. 제곱근 이하의 소수 배수 제거



변수 k 는 하나씩 증가한다. 2인 경우는 2의 배수를 전부 제거하고 3인 경우 3의 배수를 전부 제거한다. 그러나 4는 소수가 아니다.

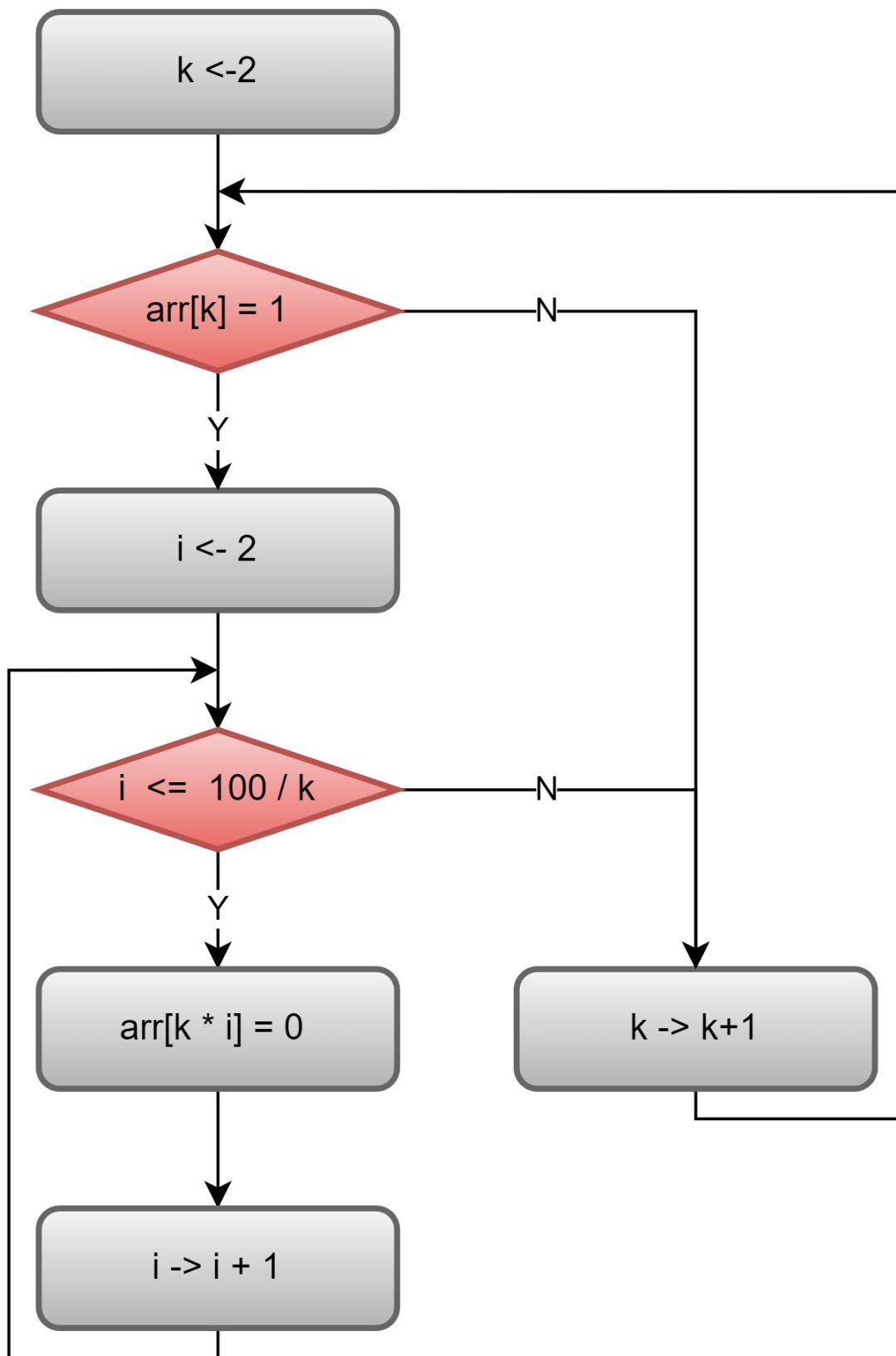
3다음 소수는 5이므로 5의배수 제거를 해야한다.

k에 대입된 값이 소수인지의 여부에 따라 반복문으로의 진입을 판단해야 한다.

2와 3의 배수제거가 끝난 단계에서 배열을 생각해보면 2와 3의 배수는 모두 제거된 상태이다.

즉, 4에는 0이 대입된 상태이다.

따라서 $arr[k] = 1$ 이면 소수, $arr[k] = 0$ 이면 k는 소수가 아니라는 것 이다.



$arr[k] = 1$ 이 참인 경우 k 는 소수 이므로 k 의 배수를 제거하는 반복처리가 실행 된다. 반대로 거짓일 경우 k 를 하나 늘려 다음 k 가 소수인지를 판명하게 된다.

$k = 4$ 인 경우 반복처리에 들어가지 않고 k 만 하나 증가시킨다.

다음 $k=5$ 은 5의 배수들을 모두 제거하고 반복한다.

에라토스테네스의 체는 '**그 수의 제곱근보다 작은 소수의 배수만 없애면 남은수는 소수다.**'라는 이론이다. 따라서 k 는 100의 제곱근 10이하가 된다.