

SAYISAL YÖNTEMLER

DERS NOTLARI

Hava Harp Okulu

25 Eylül 2025

İçindekiler

1	TEMEL KAVRAMLAR	5
1.1	Giriş	5
1.2	Yuvarlama ve Kesme Hataları	6
1.2.1	Yuvarlama Hatası	6
1.2.2	Kesme Hatası	6
1.2.3	Hataların Karşılaştırılması	7
1.3	Mutlak ve Bağıl Hata, Hata Yayılımı	7
1.3.1	Mutlak Hata	7
1.3.2	Bağıl Hata	7
1.3.3	Hata Yayılımı	7
2	TEK DEĞİŞKENLİ DENKLEMLERİN KÖKLERİNİN YAKLAŞIK HE-	9
	SABI	
2.1	Bisection (Yarılama) Yöntemi	9
2.1.1	Yöntemin Uygulanışı	10
2.2	Regula Falsi Yöntemi	13
2.2.1	Yöntemin Uygulanışı	13
2.3	Newton-Raphson Yöntemi	15
2.3.1	Yöntemin Uygulanışı	17
2.4	Sekant (Kiriş) Yöntemi	18
2.4.1	Yöntemin Uygulanışı	19
2.5	Sabit Nokta İterasyonu	21
2.5.1	Yöntemin Uygulanışı	22
3	İnterpolasyon	27
3.1	İnterpolasyon ve Lagrange Polinom	28
3.2	Lagrange İnterpolasyon Polinomları	29
3.3	Newton Bölünmüş Farklar	31
3.4	Eğri Uydurma	34
3.4.1	En Küçük Kareler Yöntemi	34
3.4.2	Örnek 6.1	35
4	Nümerik Türev	37
4.1	Nümerik Türev	37
4.2	İkinci Türev İçin Orta Nokta Formülü	40

5	Nümerik İntegrasyon	41
5.1	Nümerik İntegrasyonun Temelleri	41
5.1.1	Yamuk Kuralı	42
5.2	Simpson Kuralı	43
5.3	Newton-Cotes Formülleri	48
5.3.1	Kapalı Newton-Cotes Formülleri	48
5.4	Açık Newton-Cotes Formülleri	49
5.5	Bileşik İntegral Hesabında Oluşan Yuvarlama Hataları	59
6	Adi Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümü	61
6.1	4.2 Taylor-serisi yöntemi	62
6.2	Runge-Kutta-Fehlberg Yöntemi	72
6.3	Runge-Kutta-Merson Yöntemi	73
6.4	Runge-Kutta-Gill Algoritması	73
6.5	Çok adımlı yöntemler	74
6.5.1	Üçüncü-dereceden Adams-Bashford yöntemi	74
6.6	Dördüncü-Dereceden Adams-Bashford Yöntemi	76
7	Sonuç	81

Bölüm 1

TEMEL KAVRAMLAR

Bu ders notlarında sayısal yöntemlerin temel prensipleri ele alınacaktır. Sayısal çözümler, matematiksel problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmede kullanılır.

1.1 Giriş

Sayısal yöntemler, analitik (tam) çözümü zor veya imkânsız olan matematiksel problemlere yaklaşık çözümler sunan algoritmalar bütünüdür. Bu yöntemler, özellikle bilgisayarların gelişmesiyle birlikte, karmaşık problemleri hızlı ve etkin şekilde çözmek için yaygın olarak kullanılmaktadır.

Sayısal yöntemlerin temel amacı, kabul edilebilir hata sınırları içinde yeterli doğrulukta sonuçlar elde etmektir. Bu yöntemler özellikle şu durumlarda tercih edilir:

- Karmaşık fonksiyonların analitik çözümünün zor veya imkânsız olduğu durumlarda,
- Kapalı formda çözüm elde edilemeyen diferansiyel denklemlerin çözümünde,
- Sayısal simülasyon ve modelleme çalışmalarında.

Matematiksel olarak tanımlanmış, ancak analitik yolla doğrudan çözülemeyen veya çözümü oldukça karmaşık olan problemler, sayısal yöntemlerle yaklaşık olarak çözülebilir. Bu çözümler genellikle bilgisayar destekli algoritmalarla gerçekleştirilir ve mühendislik, fizik, ekonomi gibi pek çok alanda yaygın uygulama bulur.

Örneğin, bir fonksiyonun kökü analitik olarak bulunamıyorsa, sayısal kök bulma yöntemleri ile bu değer yaklaşık olarak hesaplanabilir. Benzer şekilde, çok bilinmeyenli doğrusal denklem sistemleri, matris işlemleri ve diğer doğrusal cebir problemleri sayısal tekniklerle etkin biçimde çözülebilir.

Bunun yanı sıra, belirli veri noktaları arasındaki eğilimleri tahmin etmek için enterpolasyon ve ekstrapolasyon yöntemleri; türev ve integral hesaplamalarında ise sayısal türev ve integrasyon teknikleri kullanılır. Bu yöntemler özellikle fonksiyonun kapalı formu bilinmediğinde veya oldukça karmaşık olduğunda önem kazanır.

Son olarak, başlangıç ve sınır değer problemleri içeren diferansiyel denklemlerin çözümü, sayısal yöntemlerin en önemli uygulama alanlarından biridir. Euler, Runge-Kutta gibi yöntemlerle bu denklemlere yaklaşık çözümler elde edilir.

Özetle, sayısal yöntemler kök bulma, doğrusal denklem sistemleri, enterpolasyon, sayısal integrasyon ve diferansiyel denklemlerin çözümü gibi pek çok temel matematiksel problemin çözümünde güçlü ve esnek yaklaşımlar sunar.

1.2 Yuvarlama ve Kesme Hataları

Sayısal hesaplamalarda iki temel hata türüyle karşılaşılır: **yuvarlama hatası** ve **kesme hatası**.

1.2.1 Yuvarlama Hatası

Bilgisayarlar, gerçek sayıları sonlu sayıda basamakla temsil eder. Bu nedenle, bazı sayılar en yakın değere yuvarlanarak belleğe kaydedilir. Bu yuvarlama işlemi sırasında, gerçek değer ile temsil edilen değer arasında küçük bir fark oluşur. Bu farka **yuvarlama hatası** denir.

Örnek 1.1

$$\pi = 3.1415926535 \quad (\text{gerçek değer}) \pi \approx 3.14159 \quad (6 \text{ basamakla yuvarlanmış hali})$$

$$\text{Hata} = |3.1415926535 - 3.14159| = 0.0000026535$$

Yuvarlama hatası, özellikle çok sayıda işlemin yapıldığı algoritmalarda birikerek sonuçları önemli ölçüde etkileyebilir.

1.2.2 Kesme Hatası

Kesme hatası, bir işlemin teorik olarak sonsuz sayıda adım gerektirmesi fakat pratikte bu işlemin yalnızca belli sayıda adımla yapılmasından kaynaklanır. Yani algoritmanın yaklaşık doğasından doğan bir hatadır.

Örnek 1.2 Taylor serisine göre:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Eğer bu seri yalnızca ilk üç terimle sınırlandırılırsa:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

Bu yaklaşık değer gerçeğe değere farkı **kesme hatasıdır**. Kesme hataları genellikle:

- Daha küçük adım boyu (h),
- Daha fazla terim içeren yaklaşık formüller kullanarak azaltılabilir.

Özellik	Yuvarlama Hatası	Kesme Hatası
Kaynak	Bellekte sınırlı basamakla temsil	Yaklaşık algoritmalar
Etkilenme Nedeni	Bit sayısı, veri tipi	Adım sayısı, seri terimi
Azaltma Yolu	Daha fazla basamak	Daha fazla adım veya terim

Tablo 1.1: Yuvarlama ve Kesme Hatalarının Karşılaştırması

1.2.3 Hataların Karşılaştırılması

1.3 Mutlak ve Bağıl Hata, Hata Yayılımı

Sayısal yöntemlerde, hesaplamalar ve ölçümler sırasında kesin sonuçlara ulaşmak çoğu zaman mümkün değildir. Bu nedenle sonuçlarda hata oluşur. Hatalar, gerçek değer ile bulunan değer arasındaki farkı ifade eder ve iki ana türde incelenir: mutlak hata ve bağıl hata.

1.3.1 Mutlak Hata

Mutlak hata, ölçülen ya da hesaplanan değerın gerçek değerden farkının büyüklüğüdür. Matematiksel olarak:

$$\text{Mutlak Hata} = |x_{\text{gerçek}} - x_{\text{yaklaşık}}|$$

Burada;

- $x_{\text{gerçek}}$: gerçek (doğru) değer
- $x_{\text{yaklaşık}}$: bulunan veya ölçülen değer

Mutlak hata, hata miktarını doğrudan ölçer ve birimin aynısıdır.

1.3.2 Bağıl Hata

Bağıl hata, mutlak hatanın gerçek değere oranıdır ve hatanın büyüklüğünü, ölçülen değerin büyüklüğüne göre ifade eder. Genellikle yüzde olarak da gösterilir:

$$\text{Bağıl Hata} = \frac{|x_{\text{gerçek}} - x_{\text{yaklaşık}}|}{|x_{\text{gerçek}}|} = \frac{\text{Mutlak Hata}}{|x_{\text{gerçek}}|}$$

Bağıl hata, sonuçların göreceli doğruluğunu değerlendirmek için önemlidir. Özellikle çok büyük veya çok küçük değerlerde mutlak hata yanıltıcı olabilir.

1.3.3 Hata Yayılımı

Sayısal hesaplamalar genellikle birden fazla adımdan oluşur. Her adımda ortaya çıkan küçük hatalar, işlemler ilerledikçe birleşerek toplam hatayı etkileyebilir. Bu duruma hata yayılımı denir.

Hata yayılımını anlamak için genellikle türev ve farklılaştırma kullanılır. Örneğin, $y = f(x)$ fonksiyonunda, x 'deki bir hata Δx , y 'de şu şekilde bir hata oluşturabilir:

$$\Delta y \approx \left| \frac{dy}{dx} \right| \Delta x$$

Birden fazla değişkenli fonksiyonlarda hata yayılımı genel olarak:

$$\Delta y \approx \sum_i \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

Burada, Δx_i her bir değişkendeki mutlak hatayı temsil eder.

Örnek 1.3 Diyelim ki, $x = 10 \pm 0.1$ ve $y = 5 \pm 0.05$ değerleri verilsin. $z = x \cdot y$ fonksiyonunu ele alalım. Mutlak hata için:

$$\Delta z \approx |y| \Delta x + |x| \Delta y = 5 \times 0.1 + 10 \times 0.05 = 0.5 + 0.5 = 1.0$$

Böylece $z = 50 \pm 1$ olur.

Bölüm 2

TEK DEĞİŞKENLİ DENKLEMLERİN KÖKLERİNİN YAKLAŞIK HESABI

Birçok bilimsel ve mühendislik probleminde, bir fonksiyonun sıfır yaptığı yani köklerinin bulunduğu değerlerin hesaplanması büyük önem taşır. Ancak her fonksiyonun kökü analitik yöntemlerle (el ile) bulunamayabilir. Bu durum özellikle karmaşık, doğrusal olmayan ya da transandantal fonksiyonlar için geçerlidir. Bu nedenle, yaklaşık köklerin hesaplanması

amacıyla sayısal (nümerik) yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemler, fonksiyonun belirli bir aralıkta sürekli olduğu ve bu aralıkta en az bir kök bulunduğu varsayımıyla çalışır. Amaç, bu köke giderek yaklaşan bir dizi (iterasyon) üretmek ve belirli bir hata payı içinde çözüm elde etmektir. Yaklaşık kök bulma yöntemleri hem bilgisayar uygulamalarında hem de

teorik analizlerde yaygın olarak kullanılır ve hata analizi, yakınsama hızı gibi kavramlarla birlikte değerlendirilir.

2.1 Bisection (Yarılama) Yöntemi

Bisection yöntemi, ara değer teoremi gereği bir fonksiyonun grafiğinde $f(a)$ ve $f(b)$ zıt işaretli olduğunda, $[a, b]$ aralığında bir kök olduğunu garanti eder. Her adımda aralığın ortası alınır:

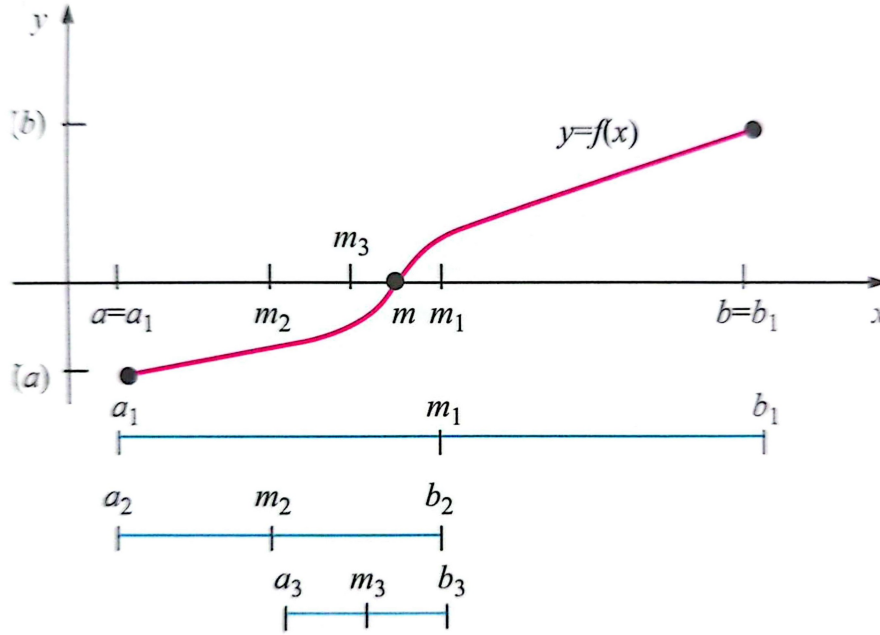
$$m = \frac{a + b}{2}$$

ve $f(m)$ incelenerek kökün hangi yarı aralıkta olduğu belirlenir. Bu işlem tekrarlanarak aralık daraltılır.

Geometrik olarak, bu yöntem fonksiyonun grafiğinde kökün bulunduğu bölgeyi adım adım ikiye bölerek kökü çevreleyen aralığı daraltır. Her iterasyon, kökün içinde yer aldığı bir aralığı daha da küçültür. Bu süreç:

- x -eksenini kesen noktayı çevreleyen dikdörtgenlerin daralması,
- köke giderek yaklaşan bir *zoom* hareketi

şeklinde görselleştirilebilir.



Şekil 2.1: Bisection Yöntemi ile Köke Yaklaşım

2.1.1 Yöntemin Uygulanışı

$n = 0, 1, 2, \dots$ için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Başlangıç aralığını belirleriz:

$$f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$$

olacak şekilde $[a_0, b_0]$ aralığını seçilir.

2. Orta nokta hesaplanır:

$$m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

3. Fonksiyonun orta noktadaki değeri hesaplanır:

$$f(m_n)$$

4. Yeni aralık aşağıdaki şekilde güncellenir:

- Eğer $f(a_n) \cdot f(m_n) < 0$ ise

$$a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = m_n$$

- Eğer $f(m_n) \cdot f(b_n) < 0$ ise

$$a_{n+1} = m_n, b_{n+1} = b_n$$

- Eğer $f(m_n) = 0$ ise kök tam olarak bulundu: $x = m_n$

5. Aşağıdaki sonlanma koşullarından biri sağlanana kadar adımlar tekrarlanır:

- $|f(m_n)| < \varepsilon$

- $|b_n - a_n| < \varepsilon$
- $n \geq N_{\max}$

Örnek 2.1. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ fonksiyonunun $[1, 2]$ aralığındaki kökünü (sıfır yerini) yarılama yöntemi ile bulunuz.

Çözüm: $[1, 2]$ aralığı üzerinde $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ fonksiyonu için adım adım işaret incelemesi ve yaklaşık kök hesabı yapılırsa

Verilen fonksiyon:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

Başlangıç aralığı:

$$[a_0, b_0] = [1, 2] \quad \text{çünkü } f(1) \cdot f(2) = (-5) \cdot (14) < 0$$

1. İterasyon (n=0):

$$m_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$f(1.5) = 1.5^3 + 4 \cdot 1.5^2 - 10 = 3.375 + 9 - 10 = 2.375$$

$$f(1) \cdot f(1.5) < 0 \Rightarrow [a_1, b_1] = [1, 1.5]$$

2. İterasyon (n=1):

$$m_1 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$$

$$f(1.25) = 1.95313 + 6.25 - 10 = -1.79687$$

$$f(1.25) \cdot f(1.5) < 0 \Rightarrow [a_2, b_2] = [1.25, 1.5]$$

3. İterasyon (n=2):

$$m_2 = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375$$

Bu şekilde 3. iterasyon sonucunda kök yaklaşık olarak $x \approx 1.375$ bulunur. Benzer şekilde devam edilirse aşağıdaki tablodaki değerler elde edilir.

n	a_n	b_n	$m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$	$f(m_n)$	Yeni Aralık
0	1	2	1.5	2.375	$[1, 1.5]$
1	1	1.5	1.25	-1.79687	$[1.25, 1.5]$
2	1.25	1.5	1.375	0.16211	$[1.25, 1.375]$
3	1.25	1.375	1.3125	-0.84863	$[1.3125, 1.375]$
4	1.3125	1.375	1.34375	-0.35089	$[1.34375, 1.375]$
5	1.34375	1.375	1.35938	-0.0961	$[1.35938, 1.375]$
6	1.35938	1.375	1.36719	0.03322	$[1.35938, 1.36719]$
7	1.35938	1.36719	1.36328	-0.03114	$[1.36328, 1.36719]$
8	1.36328	1.36719	1.36523	0.00101	$[1.36328, 1.36523]$
9	1.36328	1.36523	1.36426	-0.01508	$[1.36426, 1.36523]$

Sonuç olarak 10 iterasyon sonunda kök yaklaşık olarak $x \approx 1.36426$ bulunmuştur.

Teorem 2.1. $f \in C[a, b]$ ve $f(a)f(b) < 0$ olsun. Yarılama yöntemi ile elde edilen m_n dizisi ve fonksiyonun x yaklaşık kökü arasındaki bağıntı, $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$|m_n - m| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad n \geq 1$$

ile verilir.

İspat: Yarılama yöntemi $n-1$ adım sonra yaklaşık köke varılmış ise $[a, b]$ 'den en son elde edilen alt aralığın uzunluğu $\frac{b-a}{2^{n-1}}$ olur. Bu $\frac{b-a}{2^{n-1}}$ sayısı fonksiyonun yaklaşık kökü ile aynı olacağından

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}} (b - a)$$

olur. $m_n = \frac{1}{2} (a_n + b_n)$ olduğundan, her $n \geq 1$ için,

$$|m_n - m| \leq \frac{1}{2} (b_n - a_n) = 2^{-n} (b - a)$$

yazılır.

Örnek 2.2. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ fonksiyonunun $[1, 2]$ aralığındaki kökünü yarılama yöntemi ile $\epsilon = 10^{-5}$ doğrulukla hesaplamak için gerekli olan iterasyon sayısını bulunuz.

Çözüm: İstenen iterasyon sayısını bulmak için Teorem 2.1'e göre

$$|m_n - m| \leq \frac{1}{2} (b_n - a_n) = 2^{-n} (b - a)$$

olduğundan

$$|m_n - m| \leq 2^{-n} (b - a) = 2^{-n} < 10^{-5}$$

yazılır. Buradan $2^{-n} < 10^{-5}$ olmalıdır. Bu eşitsizlik,

$$\begin{aligned} \log_{10} 2^{-n} &< \log_{10} 10^{-5} = -5 \\ -n \log_{10} 2 &< -5 \\ n &> \frac{5}{\log_{10} 2} \approx 16.6 \end{aligned}$$

olarak çözülür. n sayısı 16.6'dan büyük ilk tam sayıdır. Böylece, $n = 17$ iterasyon sayısı bulunmuş olur.

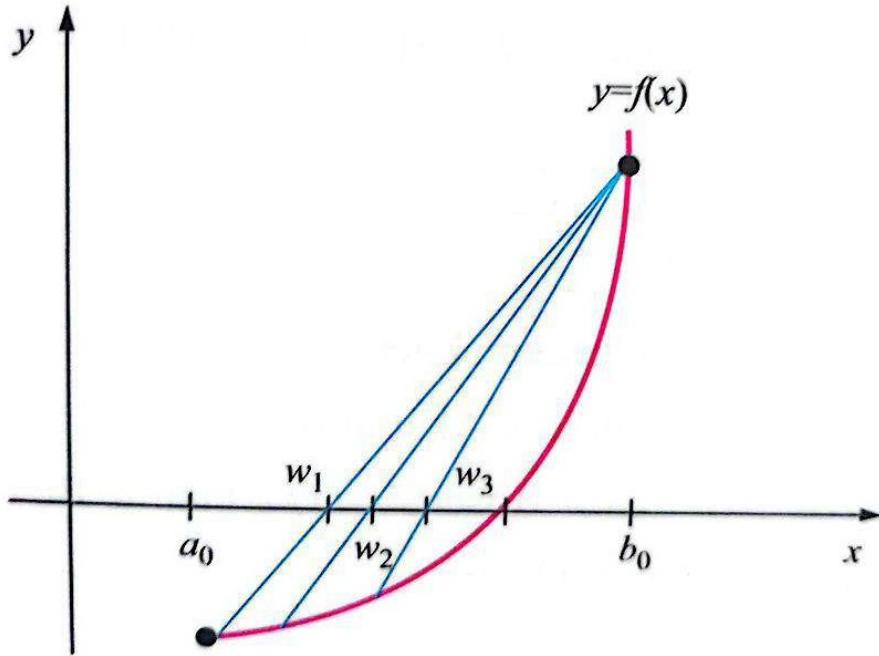
Bisection yöntemi, uygulanması kolay ve anlaşılır bir yöntemdir. Fonksiyonun işaret değiştirdiği aralıkta kökün varlığı garanti edilir ve her adımda hata azalır. Türeve ihtiyaç duymaz, bu yüzden geniş kullanım alanı vardır. Ancak yakınsama hızı yavaştır ve yalnızca işaret değişimi olan aralıklarda uygulanabilir. Başlangıç aralığı doğru seçilmezse yöntem kullanılamaz. Ayrıca, sonuçlar sadece yaklaşık değerlerdir ve sonsuz hassasiyet sağlanamaz.

2.2 Regula Falsi Yöntemi

Regula-Falsi yöntemi, kök bulmada sürekli bir fonksiyonun $[a, b]$ aralığında işaret değiştirdiği varsayımıyla, ara değer teoremine dayanır. Bu yöntem, yarılama yöntemine oldukça benzemektedir; ancak yarılama yönteminden farkı, yaklaşık kökün bulunduğu aralığın orta noktası yerine, bu iki uç noktanın fonksiyon değerlerine göre ağırlıklı ortalamasının hesaplanmasıdır. Yani, $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren kirisin x -eksenini kestiği nokta, kökün yaklaşık değeri olarak seçilir. Bu nokta aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$w_n = \frac{f(b_n) \cdot a_n - f(a_n) \cdot b_n}{f(b_n) - f(a_n)}$$

Her adımda bu işlem tekrarlanarak köke doğru ilerlenir. Bu doğrusal kestirim yaklaşımı sayesinde, Regula-Falsi yöntemi kökü daha gerçekçi bir şekilde tahmin etmeye çalışır; ancak fonksiyonun uç noktalarındaki değerler çok farklı büyüklükteyse, yakınsama yavaşlayabilir.



Şekil 2.2: Regula Falsi Yöntemi ile Köke Yaklaşım

2.2.1 Yöntemin Uygulanışı

$n = 0, 1, 2, \dots$ için aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. Başlangıç aralığını belirlenir:

$$f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$$

olacak şekilde $[a_0, b_0]$ aralığını seçilir.

2. Her iterasyonda aşağıdaki formülle yeni tahmin noktası hesaplanır:

$$w_n = \frac{f(b_n) \cdot a_n - f(a_n) \cdot b_n}{f(b_n) - f(a_n)}$$

3. Fonksiyon değeri hesaplanır:

$$f(w_n)$$

4. Yeni aralık belirlenir:

- Eğer $f(a_n) \cdot f(w_n) < 0$ ise

$$a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = w_n$$

- Aksi halde

$$a_{n+1} = w_n, b_{n+1} = b_n$$

5. Durma koşulu kontrol edilir:

- $|f(w_n)| < \varepsilon$
- $|b_n - a_n| < \varepsilon$
- $n \geq N_{\max}$

koşullarından biri sağlanıyorsa iterasyon durdurulur, aksi halde devam edilir.

Regula Falsi, $f(a)$ ve $f(b)$ noktalarından geçen doğruyu (sekant) kullanarak fonksiyonun köküne yaklaşır. Bu doğru, x -ekseniyle kesiştiği noktayı w_n olarak alır ve kök aralığını buna göre günceller.

Örnek 2.3. $f(x) = x^3 - x - 1$ fonksiyonunun $[1, 2]$ aralığındaki bir kökünü Regula-Falsi yöntemini kullanarak yaklaşık olarak hesaplayınız.

Çözüm: $[1, 2]$ aralığı üzerinde $f(x) = x^3 - x - 1$ fonksiyonu için adım adım işaret incelemesi ve yaklaşık kök hesabı yapılırsa

Verilen fonksiyon:

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

Başlangıç aralığı:

$$\begin{aligned} [a_0, b_0] &= [1, 2] \\ f(1) &= 1^3 - 1 - 1 = -1 \\ f(2) &= 8 - 2 - 1 = 5 \end{aligned}$$

1. İterasyon (n=0):

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{f(b_0)a_0 - f(a_0)b_0}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{5 \cdot 1 - (-1) \cdot 2}{5 - (-1)} = \frac{5 + 2}{6} = \frac{7}{6} \approx 1.16667 \\ f(w_0) &= (1.16667)^3 - 1.16667 - 1 \approx -0.57817 \\ f(a_0) \cdot f(w_0) &> 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = w_0, \quad b_1 = b_0 \end{aligned}$$

2. İterasyon (n=1):

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1.16667 \quad , \quad b_1 = 2 \\
f(a_1) &\approx -0.57817 \quad , \quad f(b_1) = 5 \\
w_1 &= \frac{5 \cdot 1.16667 - (-0.57817) \cdot 2}{5 - (-0.57817)} \approx \frac{6.98969}{5.57817} \approx 1.25270 \\
f(w_1) &= (1.25270)^3 - 1.25270 - 1 \approx -0.28786 \\
f(a_1) \cdot f(w_1) &> 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = w_1 \quad , \quad b_2 = b_1
\end{aligned}$$

3. İterasyon (n=2):

$$\begin{aligned}
a_2 &= 1.25270 \quad , \quad b_2 = 2 \\
f(a_2) &\approx -0.28786 \quad , \quad f(b_2) = 5 \\
w_2 &= \frac{5 \cdot 1.25270 - (-0.28786) \cdot 2}{5 - (-0.28786)} \approx \frac{6.83922}{5.28786} \approx 1.28901
\end{aligned}$$

Bu şekilde 3. iterasyon sonucunda kök yaklaşık olarak $x \approx 1.293$ bulunur. Benzer şekilde devam edilirse aşağıdaki tablodaki değerler elde edilir.

n	a_n	b_n	w_n	$f(w_n)$	Yeni Aralık
0	1.00000	2.00000	1.16667	-0.57870	[1.16667, 2]
1	1.16667	2.00000	1.25270	-0.28544	[1.25270, 2]
2	1.25270	2.00000	1.28901	-0.13444	[1.28901, 2]
3	1.28901	2.00000	1.30539	-0.06255	[1.30539, 2]
4	1.30539	2.00000	1.31279	-0.02856	[1.31279, 2]
5	1.31279	2.00000	1.31629	-0.01299	[1.31629, 2]
6	1.31629	2.00000	1.31782	-0.00587	[1.31782, 2]
7	1.31782	2.00000	1.31852	-0.00265	[1.31852, 2]
8	1.31852	2.00000	1.31883	-0.00119	[1.31883, 2]
9	1.31883	2.00000	1.31897	-0.00053	[1.31897, 2]

Sonuç olarak 10 iterasyon sonunda kök yaklaşık olarak $x \approx 1.31897$ bulunmuştur.

Regula Falsi yöntemi, kök bulma problemlerinde kullanılan, türev gerektirmeyen ve işaret değişimine dayalı bir sayısal yöntemdir. Avantajları arasında, kökün bulunduğu aralıkta güvenilir şekilde çalışması, genellikle Bisection yöntemine göre daha hızlı yakınsaması ve uygulanmasının basit olması yer alır. Ancak yöntemin bazı dezavantajları da vardır. Aralık daralması çoğunlukla tek taraflı olduğu için yakınsama yavaş olabilir. Ayrıca kök aralığının bir ucuna yakınsa, diğer uç sabit kalabilir ve bu da yöntemin verimliliğini azaltabilir.

2.3 Newton-Raphson Yöntemi

Newton-Raphson yöntemi, türevlenebilir ve sürekli bir fonksiyonun kökünü bulmak için kullanılan hızlı yakınsama özelliğine sahip sayısal bir çözümdür. Yöntem, fonksiyonun

mevcut tahmin noktasındaki teğet doğrusunu kullanarak köke daha yakın bir tahmin yapar. Bu yaklaşım, fonksiyonun o noktadaki değerinin Taylor serisiyle lineer olarak yaklaşık ifadesine dayanır. Böylece kök, bu lineer yaklaşımın sıfır yaptığı noktadan iteratif olarak bulunur. Başlangıç noktasına yakın bir kökün hızlı ve hassas şekilde bulunmasını sağlayan Newton-Raphson yöntemi, mühendislik, fizik ve uygulamalı matematik gibi alanlarda ve bilgisayar destekli kök bulma işlemlerinde yaygın olarak tercih edilir.

Bu yöntemin matematiksel ifadesi şu şekildedir:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Burada, x_n mevcut tahmin, $f(x_n)$ fonksiyon değeri ve $f'(x_n)$ türev değeridir.

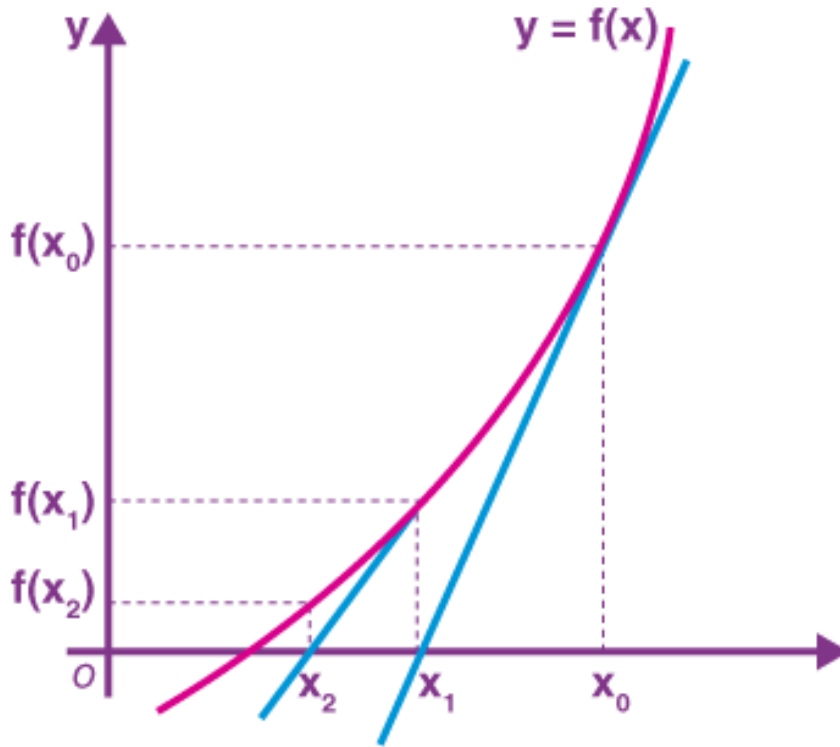
Newton-Raphson yönteminin kökeni, Taylor serisi açılımına dayanır. Fonksiyonun x_n civarındaki Taylor açılımı:

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

Bu lineer yaklaşımda kök, $f(x) = 0$ denklemini sağlayan x olarak bulunur:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \implies x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Böylece Newton-Raphson yöntemi, kökü bu lineer yaklaşımın sıfır noktası olarak iteratif biçimde hesaplar.



Şekil 2.3: Newton-Raphson Yöntemi ile Köke Yaklaşım

2.3.1 Yöntemin Uygulanışı

Newton-Raphson yöntemi, türevlenebilir bir fonksiyonun kökünü bulmak için iteratif olarak kullanılan etkili bir yöntemdir. Aşağıdaki adımlar uygulanarak hesaplama yapılır.

1. Kökü tahmin etmek için uygun bir başlangıç değeri x_0 seçilir.
2. Her adımda yeni değer aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Burada $f'(x_n)$, x_n noktasındaki türevidir.

3. İterasyon, aşağıdaki durdurma koşullarından biri sağlanana kadar devam eder:

- $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$
- $|f(x_{n+1})| < \delta$
- $n \geq N_{\max}$

4. Durdurma koşulu sağlandığında, x_{n+1} köke yaklaşık değer olarak kabul edilir.

Örnek 2.4. $f(x) = x^3 - 3x - 2$ fonksiyonunun bir kökünü (sıfır yerini) başlangıç değerini $x_0 = 3$ alarak Newton-Raphson yöntemi ile bulunuz.

Çözüm: $f(x) = x^3 - 3x - 2$ fonksiyonunun bir kökünü yaklaşık olarak hesaplamak için $x_0 = 3$ başlangıç değeri ile Newton-Raphson yöntemi yardımıyla hesaplama aşağıdaki şekilde yapılabilir.

Verilen fonksiyon:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2$$

Türevi:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Newton-Raphson yineleme formülü:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Başlangıç değeri:

$$x_0 = 3$$

1. İterasyon (n=0):

$$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 - 2 = 27 - 9 - 2 = 16$$

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 3 = 3 \cdot 9 - 3 = 27 - 3 = 24$$

$$x_1 = 3 - \frac{16}{24} = 3 - 0.66667 = 2.33333$$

2. İterasyon (n=1):

$$\begin{aligned}
 f(2.33333) &= (2.33333)^3 - 3 \cdot 2.33333 - 2 \approx 12.698 - 7 - 2 = 3.69800 \\
 f'(2.33333) &= 3 \cdot (2.33333)^2 - 3 = 3 \cdot 5.44444 - 3 = 16.33333 - 3 = 13.33333 \\
 x_2 &= 2.33333 - \frac{3.69800}{13.33333} = 2.33333 - 0.27735 = 2.05598
 \end{aligned}$$

3. İterasyon (n=2):

$$\begin{aligned}
 f(2.05598) &= (2.05598)^3 - 3 \cdot 2.05598 - 2 \approx 8.68918 - 6.16794 - 2 = 0.52124 \\
 f'(2.05598) &= 3 \cdot (2.05598)^2 - 3 = 3 \cdot 4.22713 - 3 = 12.68139 - 3 = 9.68139 \\
 x_3 &= 2.05598 - \frac{0.52124}{9.68139} = 2.05598 - 0.05384 = 2.00214
 \end{aligned}$$

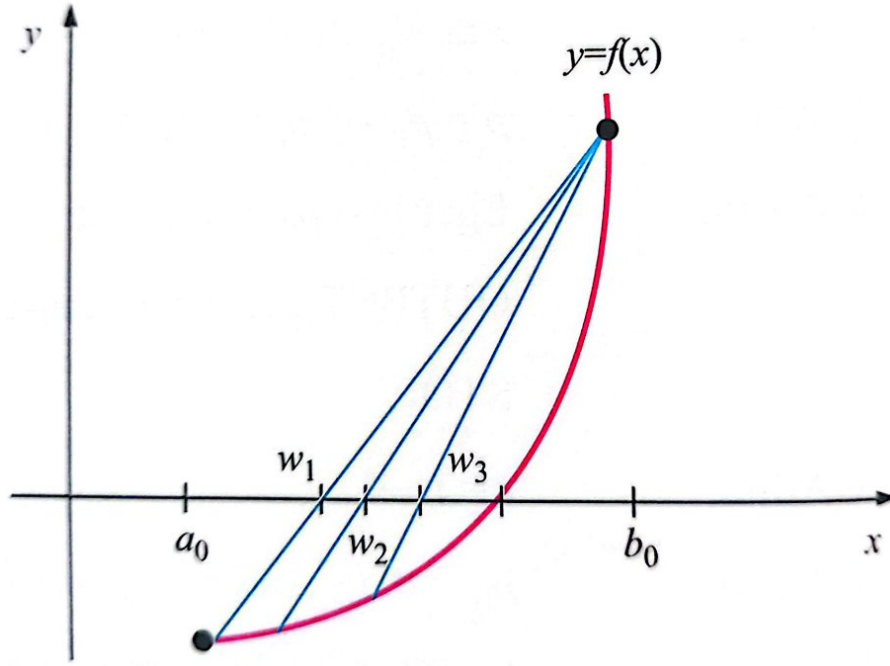
Üç iterasyon sonunda kökün yaklaşık değeri $x_3 = 2.00214$ olarak bulunur. Benzer şekilde devam edilirse aşağıdaki tablodaki değerler elde edilir.

n	x_{n+1}	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_{n+1})$
0	2.33333	3.00000	16.00000	13.33332
1	2.05417	2.33333	3.72217	9.65886
2	2.00215	2.05417	0.50245	9.02582
3	2.00000	2.00215	0.01949	9.00000
4	2.00000	2.00000	0.00000	9.00000

Newton-Raphson yöntemi, doğrusal olmayan denklemlerin köklerini bulmak için kullanılan bir sayısal yöntemdir ve türevlenebilir fonksiyonlar üzerinde iteratif bir çözüm sunar. Yöntemin avantajları arasında, başlangıç değeri köke yakınsa hızlı bir şekilde sonuca ulaşabilmesi, doğru bir başlangıçla yüksek hassasiyet elde edebilmesi ve geniş bir fonksiyon yelpazesinde uygulanabilir olması sayılabilir. Ayrıca formülü basit ve kullanımı kolaydır. Ancak, kötü seçilen bir başlangıç değeriyle yöntem yanlış köke yaklaşabilir veya yakınsamayabilir. Ayrıca türev alınamayan fonksiyonlarda kullanılamaz, türev değeri sıfıra yakınsa hata oluşabilir, çoklu köklerde yakınsama hızı düşer ve sürekli türevlenebilir olmayan fonksiyonlarda sorun yaşanabilir.

2.4 Sekant (Kiriş) Yöntemi

Sekant yöntemi, bir fonksiyonun kökünü yaklaşık olarak bulmak için kullanılan, türev hesabı gerektirmeyen bir iteratif yöntemdir. Yöntem, başlangıçta köke yakın iki değer seçilerek başlatılır: x_0 ve x_1 . Bu iki noktadan geçen doğru (kiriş) çizilir ve bu doğrunun x-eksenini kestiği nokta x_2 olarak yeni yaklaşık kök kabul edilir. İşlem, her seferinde son iki noktayı kullanarak tekrarlanır. Newton-Raphson yöntemine benzerlik gösterir; ancak türev hesabı gerektirmez. Bu özelliği sayesinde, türevi analitik olarak hesaplanamayan ya da hesaplanması zor olan fonksiyonlar için avantaj sağlar. Grafikselsel olarak bakıldığında, fonksiyon eğrisine teğet yerine, iki noktadan geçen bir doğru ile yaklaşım yapılır. Ancak aralık garantisi olmadığından, her zaman yakınsama sağlamayabilir.



Şekil 2.4: Sekant (Kiriş) Yöntemi ile Köke Yaklaşım

2.4.1 Yöntemin Uygulanışı

1. Başlangıç olarak iki tahmini değer seçilir: x_0 ve x_1 .
2. Yeni yaklaşık kök şu formülle hesaplanır:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

3. İterasyon, aşağıdaki durdurma koşullarından biri sağlanana kadar devam eder:

- $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$
- $|f(x_{n+1})| < \delta$
- $n \geq N_{\max}$

4. Durdurma koşulu sağlandığında, x_{n+1} köke yaklaşık değer olarak kabul edilir.

Örnek 2.5. $f(x) = \cos x - x$ fonksiyonunun kökünü $x_0 = 0.5$ ve $x_1 = \pi/4$ başlangıç değerini kullanarak Sekant yöntemi ile bulunuz.

Çözüm: $f(x) = \cos x - x$ fonksiyonunun kökünü $x_0 = 0.5$ ve $x_1 = \pi/4$ başlangıç değerleri kullanılarak Sekant yöntemi yardımıyla aşağıdaki şekilde hesaplanır.

Verilen fonksiyon:

$$f(x) = \cos x - x$$

Başlangıç değerleri:

$$x_0 = 0.5, \quad x_1 = \frac{\pi}{4} \approx 0.78540$$

1. İterasyon (n=1):

$$f(x_0) = \cos(0.5) - 0.5 = 0.87758 - 0.5 = 0.37758$$

$$f(x_1) = \cos(0.78540) - 0.78540 = 0.70711 - 0.78540 = -0.07829$$

$$x_2 = 0.78540 - \frac{-0.07829 \cdot (0.78540 - 0.5)}{-0.07829 - 0.37758} = 0.78540 - 0.04901 = 0.73639$$

2. İterasyon (n=2):

$$f(x_1) = -0.07829$$

$$f(x_2) = \cos(0.73639) - 0.73639 = 0.74156 - 0.73639 = 0.00517$$

$$x_3 = 0.73639 - \frac{0.00517 \cdot (0.73639 - 0.78540)}{0.00517 - (-0.07829)} = 0.73639 + 0.00025 = 0.73664$$

3. İterasyon (n=3):

$$f(x_2) = 0.00517$$

$$f(x_3) = \cos(0.73664) - 0.73664 = 0.74134 - 0.73664 = 0.00470$$

$$x_4 = 0.73664 - \frac{0.00470 \cdot (0.73664 - 0.73639)}{0.00470 - 0.00517} = 0.73664 + 0.00250 = 0.73914$$

Üç iterasyon sonunda kökün yaklaşık değeri $x \approx 0.73914$ olarak bulunur. Benzer şekilde devam edilirse aşağıdaki tablodaki değerler elde edilir.

n	x_{n+1}	x_n	x_{n-1}
1	0.73639	0.78540	0.50000
2	0.73664	0.73639	0.78540
3	0.73914	0.73664	0.73639
4	0.73908	0.73914	0.73664
5	0.73909	0.73908	0.73914

Sekant yöntemi, türev hesaplamadan fonksiyon köklerine ulaşmayı hedefleyen bir iteratif yöntemdir. Bu yöntemin bazı avantajları ve dezavantajları vardır. Avantajları arasında türev gerektirmemesi, sadece fonksiyon değerleriyle çalışması, iki başlangıç noktasıyla esneklik sağlaması ve özellikle türevi zor hesaplanan fonksiyonlar için pratik bir çözüm sunması yer alır. Ayrıca, türev kullanılmayan yöntemler arasında genelde hızlı bir yakınsama sağlar. Öte yandan, yöntemin bazı dezavantajları da bulunmaktadır. Uygun iki başlangıç noktası seçilmezse yakınsama gerçekleşmeyebilir. Yakınsaklık her zaman garanti değildir ve bazı durumlarda yöntem sapabilir ya da hiç sonuç vermeyebilir. Ayrıca, yakınsama hızı sabit değildir ve fonksiyonun yapısına bağlı olarak değişkenlik gösterebilir.

2.5 Sabit Nokta İterasyonu

Newton-Raphson yöntemi, bir fonksiyonun kökünü yaklaşık olarak bulmak için kullanılan ve hızlı yakınsama sağlayan sayısal bir yöntemdir. $f(x) = 0$ denklemi için kullanılan iteratif formül şu şekildedir:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Her adımda fonksiyonun türevi yardımıyla daha iyi bir yaklaşık değer üretilir. Yöntem, köke yakın bir başlangıçla kuadratik yakınsama sağlar; ancak türev hesaplaması gerekir ve bu her fonksiyon için pratik olmayabilir. Bu noktada daha genel ve türev bilgisi gerektirmeyen bir yaklaşım olan **sabit nokta iterasyonu** devreye girer. Aslında, Newton-Raphson formülü aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad , \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Bu gösterim, Newton-Raphson yönteminin bir sabit nokta iterasyonu olduğunu ortaya koyar. Genel anlamda sabit nokta iterasyonu, $f(x) = 0$ denkleminin $x = g(x)$ biçiminde düzenlenmesine dayanır. Bu durumda aşağıdaki iteratif süreç uygulanır:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Amaç, bu süreci tekrarlayarak $x = g(x)$ koşulunu sağlayan bir sabit noktaya ulaşmaktır. Bu sabit nokta, orijinal denklemin yaklaşık çözümüne karşılık gelir.

Sabit nokta iterasyonunun yakınsama göstermesi için belirli koşulların sağlanması gerekir. En temel yakınsama koşulu, sabit nokta çevresinde fonksiyonun türevinin mutlak değerinin 1'den küçük olmasıdır:

$$|g'(x)| < 1$$

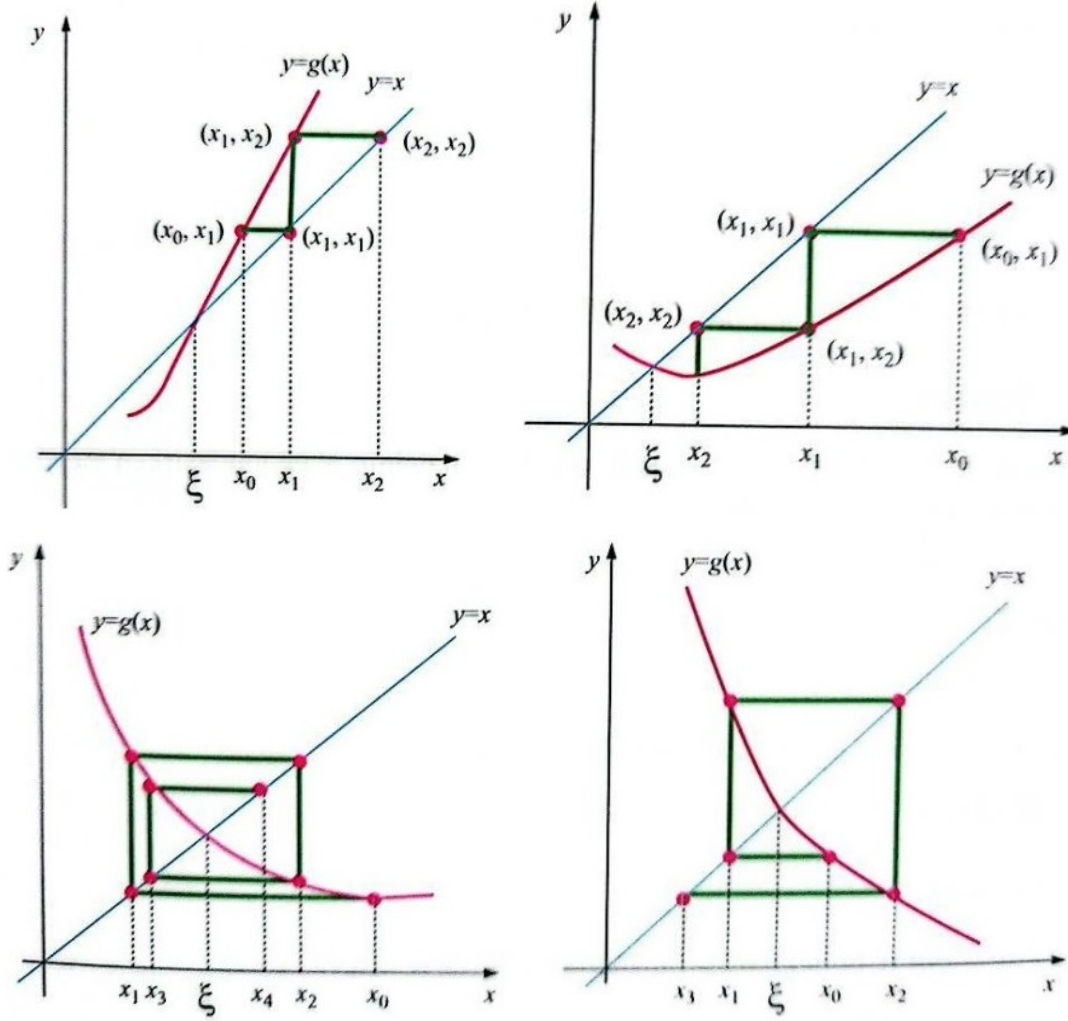
Bu koşul sağlanmadığında yöntem yakınsamayabilir, hatta ıraksayabilir. Bu nedenle sabit nokta iterasyonu, Newton-Raphson'a göre daha basit ve türev gerektirmeyen bir yöntem olsa da, daha dikkatli analiz ve uygun bir $g(x)$ seçimi gerektirir.

Geometrik olarak, sabit nokta iterasyonu, $y = g(x)$ eğrisi ile $y = x$ doğrusunun kesişim noktasını bulmaya çalışmaktır. Bu kesişim noktası, $x = g(x)$ denkleminin sabit noktasıdır. İterasyon adımları şu şekilde gerçekleşir: Başlangıçta bir x_0 noktası seçilir. Dikey

olarak $y = g(x)$ eğrisine gidilir ve $(x_0, g(x_0))$ noktası bulunur. Sonra yatay olarak $y = x$ doğrusuna yansıtılarak yeni tahmin $x_1 = g(x_0)$ elde edilir. Bu işlem x_1 için tekrarlanarak $x_2 = g(x_1)$ bulunur ve iterasyon devam eder. Eğer $|g'(x)| < 1$ ise iterasyonlar bu sabit

noktaya yakınsar. Ancak $|g'(x)| > 1$ ise iterasyonlar sabit noktaya yakınsamaz. Bu süreç,

grafik üzerinde $y = g(x)$ eğrisi ile $y = x$ doğrusu arasında gidip gelen bir yansıma hareketi gibidir.



Şekil 2.5: Sabit Nokta İterasyonu ile Köke Yaklaşım

2.5.1 Yöntemin Uygulanışı

Sabit nokta iterasyonu, bir denklemin yaklaşık kökünü bulmak amacıyla aşağıdaki adımlarla uygulanır:

1. Verilen $f(x) = 0$ denklemi, eşdeğer bir şekilde $x = g(x)$ biçimine dönüştürülür.
2. Seçilen $g(x)$ fonksiyonunun, köke yakın bir bölgede türevinin mutlak değeri 1'den küçük olmalıdır:

$$|g'(x)| < 1$$

Bu koşul, iterasyonların yakınsayabilmesi için gereklidir.

3. Çözümün yakınında olduğu düşünülen bir başlangıç değeri x_0 belirlenir.
4. Aşağıdaki iterasyon formülü uygulanır:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Bu işlem, aşağıdaki durdurma koşullarından biri sağlanana kadar devam eder:

- $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$
- $|f(x_{n+1})| < \delta$
- $n \geq N_{\max}$

5. Durdurma koşulu sağlandığında, son bulunan değer yaklaşık kök olarak kabul edilir. Yeterli yakınsama gözlenmezse yöntem başarısız olabilir; bu durumda başka bir $g(x)$ fonksiyonu veya başlangıç değeri denenebilir.

Örnek 2.6. $f(x) = x^2 - x - 2$ fonksiyonu için $g(x)$ iterasyon fonksiyonunun kaç şekilde seçilebileceğini gösteriniz.

Çözüm: $f(x) = x^2 - x - 2$ fonksiyonu için $g(x)$ iterasyon fonksiyonu:

1. $g(x) = x^2 - 2$
2. $g(x) = \sqrt{x+2}$
3. $g(x) = 1 + 2/x$
4. $g(x) = x - (x^2 - x - 2)/m$, $(m > 0 \text{ sabit})$

olarak dört farklı şekilde seçilebilir.

Örnek 2.7. $g(x) = x - \sin \pi x$ iterasyon fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığında iki sabit noktası vardır. Bunlar, $x = 0$ ve $x = 1$ 'dir. Bu sabit noktalar aşağıdaki şekilde geometrik olarak gösterilmiştir.

Teorem 2.2. Eğer, her $x \in [a, b]$ için $g \in C[a, b]$ ve $g(x) \in [a, b]$ ise, g fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sabit noktası vardır. Bundan başka, (a, b) üzerinde $g'(x)$ türevi var ve her $x \in [a, b]$ için

$$|g'(x)| \leq k < 1$$

olacak şekilde pozitif bir $k < 1$ sayısı varsa, g fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde bir tek p sabit noktası vardır.

Örnek 2.8. $g(x) = (x^2 - 1)/3$ fonksiyonunun $[-1, 1]$ aralığında sabit noktasının olduğunu ve bu sabit noktanın tek olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Ekstreum Değer Teoremi'ne göre g fonksiyonunun mutlak minimumu $x = 0$ noktasındadır ve $x = 0$ için $g(0) = -\frac{1}{3}$ olur. Aynı şekilde, g fonksiyonunun mutlak maksimumu $x = \mp 1$ noktasındadır ve $x = \mp 1$ için $g(\mp 1) = 0$ olur.

Bundan başka g fonksiyonu verilen aralıkta sürekli ve her $x \in [-1, 1]$ için

$$|g'(x)| = \left| \frac{2x}{3} \right| \leq \frac{2}{3}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu nedenle g fonksiyonu yukarıdaki teoremin koşullarını sağlar. Böylece, g fonksiyonunun verilen aralıkta sabit noktası vardır ve bu sabit nokta tektir. Gerçekten,

$$p = g(p) = \frac{p^2 - 1}{3}$$

olur. Bu formül p 'ye göre çözülürse

$$p = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{veya} \quad p = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

bulunur. Bu p değerlerinden yalnızca,

$$p = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

istenilen sabit noktadır. Diğer p değeri verilen aralığın dışındadır.

Örnek 2.9. $g(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$ olsun. $g(x)$ fonksiyonunun yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: $g(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$ olduğundan, $g'(x) = 1 - 3x^2 - 8x$ olur. $|g'(x)| < 1$ olacak şekilde p noktasını içeren herhangi bir $[a, b]$ aralığı yoktur. Bu şekilde seçilen bir $g(x)$ iterasyon fonksiyonu ile oluşturulacak dizi yakınsak değildir.

Avantajları ve Dezavantajları

Avantajlar	Dezavantajlar
Basit ve kolay uygulanabilir	Her zaman yakınsamaz
Bellek tüketimi azdır	Yakınsama yavaş olabilir
Teorik olarak güçlü bir temel sunar	Uygun $g(x)$ seçimi zordur
İlk denemede başarılı olursa hızlıdır	Farklı $g(x)$ formları farklı sonuçlar verebilir

Tablo 2.1: Sabit Nokta İterasyonunun Avantaj ve Dezavantajları

Durdurma Kriterleri

- İki ardışık değer arasındaki fark küçükse:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

- Maksimum iterasyon sayısına ulaşılmışsa (örneğin 100).

- Fonksiyon değeri yeterince küçükse:

$$|f(x_n)| < \delta$$

Örnek Uygulama (Kısa)

Denklem:

$$f(x) = \cos(x) - x = 0$$

Bu denklemden:

$$x = \cos(x) \Rightarrow g(x) = \cos(x)$$

Başlangıç değeri: $x_0 = 0.5$

İterasyonlar:

$$x_1 = \cos(0.5) = 0.8776$$

$$x_2 = \cos(0.8776) = 0.6360$$

$$x_3 = \cos(0.6360) = 0.8047$$

$$x_4 = \cos(0.8047) = 0.6945$$

\vdots

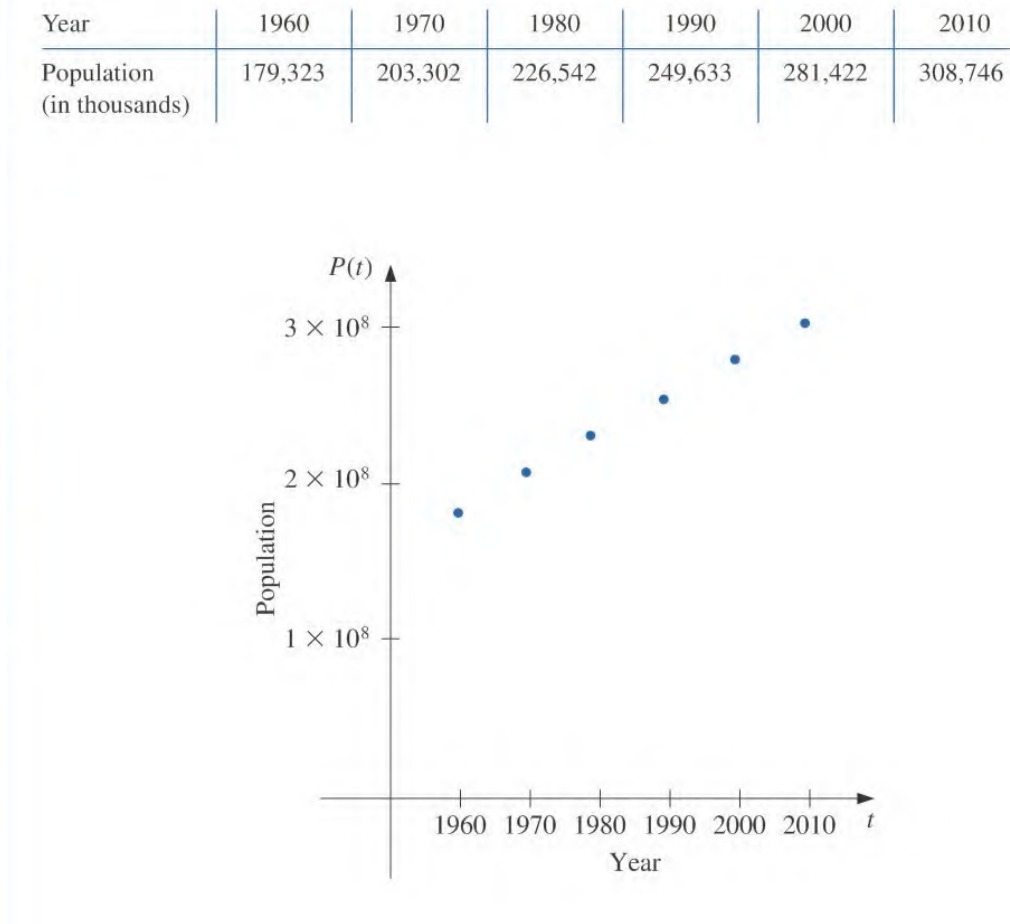
Yakınsanan değer yaklaşık olarak:

$$x^* \approx 0.739$$

Bölüm 3

İnterpolasyon

Bir ülkede 10 yılda bir yapılan nüfus sayımı şekil 3.1’de görülmektedir. Şekil 3.1, 1960’tan 2010’a kadar olan nüfusu bin kişi olarak listeler ve veriler şekilde de gösterilmiştir.



Şekil 3.1

Bu veriler incelenirken, örneğin 1975’teki veya 2020 yılındaki nüfus hakkında makul bir tahminde bulunmak için kullanılabilir. Bu tür tahminler, verilen verilere uyan bir fonksiyon kullanılarak elde edilebilir. Bu işlem interpolasyon olarak tanımlanmaktadır.

3.1 İnterpolasyon ve Lagrange Polinom

Reel sayılar kümesinde en yaygın bilinen fonksiyon sınıflarından biri, cebirsel polinomlardır. Cebirsel polinomlar,

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

şeklinde ifade edilir. Burada n negatif olmayan bir tam sayı ve a_0, a_1, \dots, a_n reel sabitlerdir. Cebirsel polinomları kullanışlı kılan nedenlerden biri bu tür fonksiyonların türev ve belirsiz integrallerinin hem kolay hesaplanması hem de onların da bir polinom olmasıdır. Polinomları önemli kılan bir diğer neden de bu sürekli fonksiyonlara düzgün olarak yaklaşabilmeleridir.

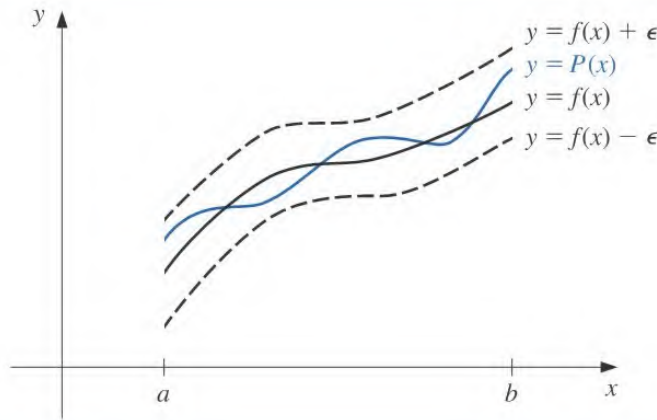
Gerçek sayılar kümesini kendisine eşleyen en kullanışlı ve bilinen fonksiyon sınıflarından biri cebirsel polinomlardır.

Teorem 3.1. (Weierstrass Yaklaşım Teoremi)

Bir f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli olsun. Buna göre $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in [a, b]$ için $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ eşitsiliğini sağlayacak şekilde bir $P(x)$ polinomu vardır.

İspat:

Teoremin isaptı birçok analiz kitabında kolaylıkla bulunabilmektedir (örneğin, bkz. [Bart], s. 165-172).



Şekil 3.2

Taylor polinomları kullanılarak verilen bir fonksiyonun bir noktadaki değerinin yaklaşık olarak hesaplaması yapılabilmektedir. Buradan hareketle fonksiyonlara polinomsal yaklaşımlarda özellikle Taylor polinomlarının her zaman kullanılacağı anlaşılmamalıdır. Şekil 3.2'ye dikkat edilirse Taylor polinomları ile x_0 noktasında tam, bu noktanın civarında yaklaşık ve bu noktadan uzaklaştıkça hassaslığı kötü olan yaklaşımlar elde edilmektedir.

Örneğin $f(x) = e^x$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasındaki çeşitli mertebeden Taylor polinomları ele alınsın.

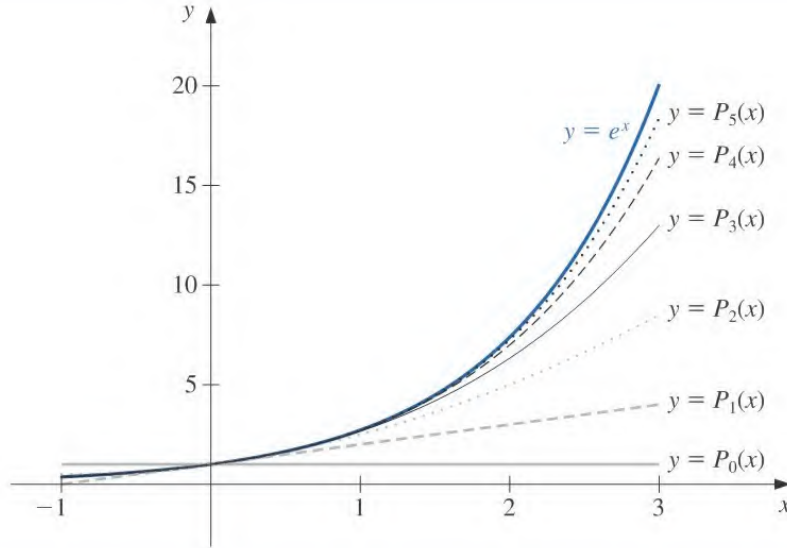
$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$



Şekil 3.3

Yüksek mertebeden polinomlar kullanılsa bile $x_0 = 0$ 'dan uzaklaştıkça oluşan hata değeri büyümektedir. İyi bir interpolasyon polinomunun bütün bir aralık boyunca nispeten doğru bir yaklaşım sağlaması gerekir. Dolayısıyla Taylor polinomları bir aralık boyunca istenilen hassaslığı sağlamak konusunda bekleneni veremezler. Nümerik Analizde, Taylor polinomları yaklaşımda bulunmaktan daha çok nümerik teknikleri geliştirmekte ve hata tahmini yapmakta kullanılır.

3.2 Lagrange İnterpolasyon Polinomları

Bu bölümde bir f fonksiyonuna özellikleri iyi bilinen daha basit bir fonksiyonlar sınıfı olan polinomlar ile yaklaşım problemlerini ele alacağız. Böyle bir yaklaşımın iki faydası vardır. Birincisi karmaşık bir fonksiyon yerine türevi, integrali vs. bilinen daha kolay fonksiyonların alınması, ikincisi ise değerleri bir tablo haline getirilmiş bir fonksiyonun tabloda bulunmayan değerlerinin hesabının yapılabilmesidir.

(x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarını ele alalım. $f(x_0) = y_0$ ve $f(x_1) = y_1$ olan bir f fonksiyonun verilen noktalardaki değerlerini polinom yardımıyla bulmamıza yarayan yaklaşıma polinom interpolasyonu denir.

$$P(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1 \quad (3.1)$$

lineer polinomunu ele alalım. Bu polinomda $P(x_0) = y_0$ ve $P(x_1) = y_1$ değerini alır. Yukarıda $f(x_0) = y_0$ ve $f(x_1) = y_1$ verildiğinden dolayı x_0 ve x_1 noktalarında polinom ile fonksiyon aynı değeri almaktadır. Bu kapsamda (3.1) eşitliğinde verilen $P(x)$ polinomuna

(x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarından geçen ve derecesi en fazla bir olan tek türlü **Lagrange interpolasyon polinomu** denir. $L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}$ ve $L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ seçilirse (3.1) denklemi,

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$$

şeklinde düzenlenebilir.

Örnek 3.1

Düzlemde $(2, 4)$ ve $(5, 1)$ noktalarından geçen lineer Lagrange interpolasyon polinomunu belirleyiniz.

Çözüm: $x_0 = 2, y_0 = 4, x_1 = 5, y_1 = 1$

$$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x-5}{2-5} = -\frac{1}{3}(x-5), \quad L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{x-2}{5-2} = \frac{1}{3}(x-2)$$

$$\Rightarrow P(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 = -\frac{1}{3}(x-5) \cdot 4 + \frac{1}{3}(x-2) \cdot 1 = -x + 6$$

$\Rightarrow P(x) = -x + 6$ elde edilir. Gerçekten de $P(2) = -2 + 6 = 4$ ve $P(5) = -5 + 6 = 1$ 'dir.

Şimdi lineer Lagrange interpolasyon polinomunu genelleştirip $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots$, gibi $n+1$ tane farklı noktadan geçen ve en fazla n . dereceden bir polinom inşa etmeye çalışalım.

Önce $k = 0, 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $L_k(x_k) = 1$ ve $i \neq k$ için $L_k(x_i) = 0$ değerlerini alacak bir $L_k(x)$ fonksiyonu tanımlayalım. $i \neq k$ için $L_k(x_i) = 0$ eşitliğinin gerçekleşmesi için $L_k(x)$ ifadesinin payının

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \cdots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \cdots (x-x_n)$$

şeklinde bir terim içermesi gerekir. Öte yandan $L_k(x_k) = 1$ olması için paydanın

$$(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2) \cdots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \cdots (x_k-x_n)$$

olması gerekir.

Bu durumda aranan fonksiyon

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \cdots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2) \cdots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \cdots (x_k-x_n)}$$

şeklinde belirlenmiş olur. $n = 1$ olduğunda $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ farklı noktaları için

$$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

olmak üzere

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$$

elde edilir.

3.3 Newton Bölünmüş Farklar

x_0, x_1, \dots, x_n gibi $n+1$ tane farklı noktada f fonksiyonu ile aynı değerleri alan n -dereceden Lagrange interpolasyon polinomu $P_n(x)$ ile gösterilsin. Bu polinom etkili türde belirli olmasına rağmen $P_n(x)$ polinomu f fonksiyonunun x_0, x_1, \dots, x_n noktalarına göre bölünmüş farkları kullanılarak, a_0, a_1, \dots, a_n 'ler uygun sabitler olmak üzere,

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

biçimindeki polinomu ile de ifade edilebilir. Şimdi bu a_n sabitlerini belirlemek için bir yöntem geliştirelim.

Yukarıdaki (*) eşitliğinde $x = x_0$ yazılırsa $a_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$ olur. x_i noktasına göre fonksiyonunun sıfıncı bölünmüş farkı $f[x_i]$ notasyonu ile gösterilir ve $f[x_i] = f(x_i)$ şeklinde tanımlanır.

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

olduğundan,

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

elde edilir. f fonksiyonunun x_i ve x_{i+1} noktalarına göre birinci bölünmüş farkı $f[x_i, x_{i+1}]$ ile gösterilir ve

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

olarak tanımlanır. İndirmeli olarak x_i, x_{i+1}, x_{i+2} noktalarına göre ikinci bölünmüş fark

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde devam ederek $k - 1$ bölünmüş fark işlemi sonunda $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]$ ve $f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}]$ terimleri elde edilmiş olur ve bunlara bağlı olarak f fonksiyonunun $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ noktalarına göre k . bölünmüş farkı

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

şeklinde ve nihayet f fonksiyonunun n . bölünmüş farkı

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

olarak tanımlanır.

$$\begin{aligned} a_0 &= f[x_0], \\ a_1 &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1], \\ a_2 &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2], \dots \end{aligned}$$

ise $k = 0, 1, \dots, n$ için

$$a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

biçimindedir.

Böylece f fonksiyonunun Newton Bölünmüş Fark Formülü kullanılarak oluşturulan interpolasyon polinomu

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] \cdot (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \cdots \\ &+ f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ değeri x_0, x_1, \dots, x_k sayılarının sırasına bağlı değildir.

Aşağıdaki resim bir f fonksiyonu için $n = 5$ olması durumunda bölünmüş farkların nasıl hesaplanacağını özetlemektedir.

Newton bölünmüş fark formülünde göz önüne alınan noktaların hepsinin eşit h aralıklı olması durumunda $P_n(x)$ Newton ileri bölünmüş fark formülü aşağıdaki biçimde yazılır:

$$i = 0, 1, \dots, n - 1 \text{ için } h = x_{i+1} - x_i \text{ ve } x = x_0 + s \cdot h \text{ olsun.}$$

Bu durumda $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$, \dots , $x_i = x_0 + i \cdot h$

nedeniyile $x_i - x_0 = s \cdot h - x_0 - i \cdot h = (s - i) \cdot h$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0 + s \cdot h) = f[x_0] + f[x_0, x_1] \cdot s \cdot h + f[x_0, x_2] \cdot s \cdot h \cdot (s - 1) \cdot h^2 + \cdots \\ &+ f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] \cdot s \cdots (s - (n - 1)) \cdot h^n \\ &= f[x_0] + \sum_{k=1}^n s \cdot (s - 1) \cdots (s - (k - 1)) \cdot h^k \cdot f[x_0, x_1, \dots, x_k] \end{aligned}$$

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2) \cdots (s-k+1)}{k!}$$

olduğu kullanılırsa aşağıdaki Newton İleri Bölünmüş Fark Formülü elde edilir:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + s \cdot h) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n \binom{s}{k} k! \cdot h^k \cdot f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

x	Birinci bölünmüş farklar	İkinci bölünmüş farklar	Üçüncü bölünmüş farklar
x_0	$f[x_0]$		
x_1	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_2	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$
x_3	$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$	$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_3, x_4, x_5] - f[x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_2}$
x_4	$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$	$f[x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_4, x_5] - f[x_3, x_4]}{x_5 - x_3}$	
x_5	$f[x_4, x_5] = \frac{f[x_5] - f[x_4]}{x_5 - x_4}$		
<hr/>			
	Dördüncü bölünmüş farklar	Beşinci bölünmüş farklar	
	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0}$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] - f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_0}$	
	$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_2, x_3, x_4, x_5] - f[x_1, x_2, x_3, x_4]}{x_5 - x_1}$		

Şekil 3.4: Bölünmüş Farklar Tablosu

Newton İleri Fark Formülü

Göz önüne alınan aralıklar eşit h aralıklı ve $\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_0) = \Delta(\Delta f(x_0)) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1] &= f(x_1) - f(x_0) \text{ için } \frac{1}{h} \Delta f(x_0) \\
f[x_0, x_1, x_2] &= f[x_0, x_1] - f[x_0] = \frac{1}{x_1 - x_0} (\Delta f(x_1) - f(x_0)) \\
&\vdots \\
f[x_0, x_1, x_2, \dots] &= \frac{1}{k! h^k} \Delta^k f(x_0)
\end{aligned}$$

İnterpolasyon noktaları sondan başa doğru $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0$ şeklinde dizilir ise

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_{n-1}](x - x_n) + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots$$

Verilen noktalar $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i - x_{i-1} = h$ sağlayan eşit aralıklı noktalar ve $x = x_n + s \cdot h$ ise $x - x_i = x_n - x_i + s \cdot h = s \cdot h + (x_n - x_{n-1}) + \dots + (x_{i+2} - x_{i+1}) + (x_{i+1} - x_i) = h + (n - i) \cdot h = (s + n - i) \cdot h$ olur.

Öte yandan $\nabla f(x_n) = f(x_n) - f(x_{n-1})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
f[x_n, x_{n-1}] &= \frac{1}{h} \nabla f(x_n), \quad f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{1}{2h^2} \nabla^2 f(x_n) \\
\dots, f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}] &= \frac{1}{k! h^k} \nabla^k f(x_n) \text{ olur.}
\end{aligned}$$

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1)(-s-2) \dots (-s-(k-1))}{k!} = (-1)^k s(s+1)(s+2) \dots (s+(k-1)) \frac{1}{k!}$$

olduğu kullanılırsa

$$P_n(x) = P_n(x_n + s \cdot h) = f(x_n) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n)$$

elde edilir.

3.4 Eğri Uydurma

Bir fonksiyonun nokta nokta verilen değerlerinden, fonksiyonun kendisine en uygun başka bir fonksiyon belirlenmesi veya uygulamada kullanılan karmaşık fonksiyonların yerine geçebilecek ve nümerik hesaplamalarda kolaylık sağlayabilecek yeni fonksiyonların araştırılması problemi eğri uydurma olarak adlandırılır.

3.4.1 En Küçük Kareler Yöntemi

Gerçek değerlerin, uydurulan doğru (veya eğri) üzerindeki noktalardan uzaklıklarını minimum yapan denklemi bulmak, bu yöntemin esasını oluşturmaktadır.

Gerçek değerler y_i , regresyon (tahmini) değerler \hat{y}_i ve bu değerler arasındaki farklar q_i olmak üzere

$$E = \sum_{i=1}^n q_i^2$$

toplamını minimum yapmak istiyoruz.

$(x_1, \hat{y}_1), (x_2, \hat{y}_2), \dots, (x_n, \hat{y}_n)$ noktalarından geçen bir doğrunun denklemi genel olarak

$$\hat{y} = ax + b$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$E = \sum_{i=1}^n q_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

olur. Bu denklemde sırayla a ve b 'ye göre türev alıp sıfıra eşitlersek:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{i=1}^n -2x_i(y_i - ax_i - b) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{i=1}^n -2(y_i - ax_i - b) = 0$$

denklemeleri elde edilir. Bu denklemleri de aşağıdaki biçimde düzenlersek:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i y_i &= a \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) + b \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \\ \sum_{i=1}^n y_i &= a \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + bn \end{aligned}$$

denklemeleri bulunur. Bu denklemlere $\hat{y} = ax + b$ regresyon doğrusunun Normal Denklemleri denir. Bu denklem sistemi çözüldükten sonra a ve b değerleri bulunur.

Normal denklemlerin matris göstergeleri:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Eğer x_i 'lerin hepsi aynı değilse,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}$$

eşitliği yazılır.

3.4.2 Örnek 6.1

Aşağıda verilen x ve y değişkenleri için, en küçük kareler yöntemini kullanarak $y = ax + b$ şeklinde bir fonksiyon bulunuz.

x_i	-1	-0.1	0.2	1
y_i	1	1.099	0.808	1

Tablo 3.1: Verilen Değerler

Çözüm: $n = 4$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	-1	1	1	-1
2	-0.1	1.099	0.01	-0.1099
3	0.2	0.808	0.04	0.1616
4	1	1	1	1
Toplam	0.1	3.907	2.05	0.0517

Tablo 3.2: Hesaplamalar

Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^4 x_i y_i = a \left(\sum_{i=1}^4 x_i^2 \right) + b \left(\sum_{i=1}^4 x_i \right) \implies 0.0517 = (2.05)a + (0.1)b$$

$$\sum_{i=1}^4 y_i = a \left(\sum_{i=1}^4 x_i \right) + 4b \implies 3.907 = (0.1)a + 4b$$

olur. Elde edilen bu lineer denklem sistemi çözülürse

$$b = 0,517 - (20,5)a \Rightarrow 3,907 = (0,1)a + 4(0,517 - (20,5)a)$$

$$\Rightarrow (81,9)a = -1,839 \Rightarrow a = -0,022454212$$

$$\Rightarrow y = (-0,022454212)x + 0,977311355 \text{ elde edilir.}$$

Bölüm 4

Nümerik Türev

4.1 Nümerik Türev

Bir f fonksiyonunun x_0, x_1, \dots, x_n noktalarındaki değerleri yardımı ile bir c noktasındaki $f'(c)$ türevini yaklaşık olarak hesaplamaya çalışacağız. f fonksiyonunun bir x_0 noktasındaki türevi sağ taraftaki limitin var olması koşulu ile

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ifadesi ile hesaplanır. Bu tanım kullanılarak $f'(x_0)$ türevine yaklaşımda bulunmak mümkündür. Şimdi bu yaklaşımı bir birbirinden farklı iki nokta kullanarak elde edelim. Daha sonra nokta sayısını $n + 1$ 'e çıkarıp genelleme yapacağız.

$x_0 \in (a, b)$ ve $x_1 \in [a, b]$ olacak şekilde yeterince küçük $h \neq 0$ sayıları için $x_1 = x_0 + h$ olsun. Şimdi $f \in C^2[a, b]$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevine yaklaşıalım. Öncelikle f fonksiyonu için x_0 ve x_1 noktaları yardımıyla Lagrange interpolasyon polinomunu $P(x)$ ile ($\xi(x)$ sayısı x_0 ile x_1 arasında olmak üzere) hata terimi ile birlikte belirleyelim:

$$f(x) = P(x) + \frac{f''(\xi(x))}{2!}(x - x_0)(x - x_1)$$

$$= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot f(x_1) + \frac{f''(\xi(x))}{2!}(x - x_0)(x - x_1)$$

$x_1 = x_0 + h$ ise $h = x_1 - x_0$ olacağından

$$f(x) = \frac{(x - x_0 - h)}{-h} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{h} f(x_1) + \frac{f''(\xi(x))}{2}(x - x_0)(x - x_1)$$

şeklinde yazılır. Her iki tarafın x 'e göre türevi alınırsa

$$f'(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{2(x - x_0) - h}{2} \cdot f''(\xi(x)) + (x - x_0)(x - x_1) \frac{d}{dx} (f''(\xi(x)))$$

Bu eşitlikte $\xi(x)$ 'i içeren terimler ihmal edilirse

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

yaklaşımı elde edilir. İhmal edilen terimlerden $\frac{d}{dx}(f''(\xi(x)))$ hakkında herhangi bir bilgi olmadığı için kesme hatasını tespit edemeyiz. Ama eğer $x = x_0$ alınır ise $\frac{d}{dx}(f''(\xi(x))) = 0$ olacağından formül daha basit bir hale gelir:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi(x_0))$$

burada $\xi(x_0)$ sayısı x_0 ile $x_0 + h$ arasındadır. Eğer bir $M > 0$ ve her $x_0 < x < x_0 + h$ için $|f''(x)| \leq M$ koşulu sağlanıyorsa

$$|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)| \leq \left| \frac{-h}{2}f''(\xi(x_0)) \right| \leq \frac{M \cdot |h|}{2}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Böylece kesme hatası için bir üst sınır belirlenmiş olur.

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

yaklaşımında $h > 0$ ise ileri fark formülü, $h < 0$ ise geri fark formülü olarak adlandırılır.

Şimdi en genel halde x_0, x_1, \dots, x_n gibi $n + 1$ tane farklı nokta için türev yaklaşım formülünü elde edelim.

Teorem 5.4'e göre x_0, x_1, \dots, x_n noktaları için f fonksiyonuna ait k -Lagrange katsayı polinomu $L_k(x)$ ve ξ sayısı verilen bir I reel sayı aralığında olmak üzere aşağıdaki eşitliğe sahibiz:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_k(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x))$$

Şimdi bu eşitlikte x 'e göre diferansiyel alınırsa

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=0}^n f(x_k)L'_k(x) + \frac{d}{dx} \left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x)) \right] \\ &\quad + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} \frac{d}{dx} (f^{(n+1)}(\xi(x))) \end{aligned}$$

Eğer $j = 0, 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $x = x_j$ ise

$$f'(x_j) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L'_k(x_j) + f^{(n+1)}(\xi(x_j)) \cdot \frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k)$$

şeklinde bir formül elde edilir. Bu formül $f'(x_j)$ türevi için $(n+1)$ -nokta formülü denir.

Nokta sayısı arttıkça yapılan yaklaşım daha iyi sonuç verecektir. Yaygın olarak üç-nokta ve beş-nokta formlarında kullanılır.

Şimdi üç-nokta formlarını elde edelim. x_0, x_1, x_2 gibi üç nokta için $L_k(x)$ ve $L'_k(x)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \Rightarrow L'_0(x) = \frac{2x-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \Rightarrow L'_1(x) = \frac{2x-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \end{aligned}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \Rightarrow L'_2(x) = \frac{2x-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Bu ifadeler $(n+1)$ -nokta formülünde $n=2$ için yerine yazılırsa $j=0,1,2$ için aşağıdaki formül elde edilir:

$$f'(x_j) \approx f(x_0) \left[\frac{2x_j-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \right] + f(x_1) \left[\frac{2x_j-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \right] + \frac{1}{6} f'''(\xi_j) \prod_{k=0}^2 (x_j-x_k)$$

Eğer verilen üç nokta eşit aralıklı ise $h \neq 0$ olmak üzere $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$ şeklinde dizilir ve $x_j = x_0 + h$ alınırsa $\xi(x)$ sayısı x_0 ile $x_0 + 2h$ arasında olmak üzere (*) formülü,

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] \quad (5.2)$$

halini alır. Eğer $x_j = x_0 + h$ alınırsa $\xi(x)$ sayısı x_0 ile $x_0 + 2h$ arasında olmak üzere (*) formülü,

$$f'(x_0 + h) = \frac{1}{2h} [-f(x_0) + f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi(x_1)) \quad (5.3)$$

halini alır. Eğer $x_j = x_0 + 2h$ alınırsa $\xi(x)$ sayısı x_0 ile $x_0 + 2h$ arasında olmak üzere (*) formülü,

$$f'(x_0 + 2h) = \frac{1}{2h} [f(x_0) - 4f(x_0 + h) + 3f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi(x_2)) \quad (5.4)$$

halini alır. Elde ettiğimiz (5.2) ve (5.4) formülleri x_0 ve $x_2 = x_0 + 2h$ uç noktalarında türev değerini verdikleri için bu formüllere üç-nokta ve üç nokta formülleri denir. (5.3) formülü ise $x_1 = x_0 + h$ orta noktasındaki türev değerini verdiği için bu formüle de üç-nokta orta nokta formülü $\xi(x_0)$ sayısı $x_0 - h$ ve $x_0 + h$ arasında olmak üzere aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi(x_0)) \quad (5.5)$$

(5.4) formülünü x_0 cinsinden yazmak için $x_0 + 2h \rightarrow x_0$ yer değişmesini yaparsak, üç noktamız $x_0 - 2h, x_0 - h, x_0$ olur ve x_0 uç noktasındaki türev formülü olan üç-nokta uç nokta formülü $\xi(x_0)$ sayısı $x_0 - 2h$ ve x_0 arasında olmak üzere aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi(x_2)) \quad (5.6)$$

Dikkat edilirse (5.2) formülünde h yerine $-h$ yazılınca (5.6) formülü elde edilir. Bu nedenle üç-nokta uç nokta formülü olarak (5.2) formülünün bilinmesi yeterlidir.

Uyarı! Her bir formüldeki $\xi(x_0)$ 'i içeren terim hata terimidir. f fonksiyonunun türevine verilen aralığın üç noktalarında yaklaşım yapılacaksa uygun üç-nokta uç nokta formülü, ara noktalarında yaklaşım yapılacaksa üç-nokta orta nokta formülü daha iyi sonuç verir.

4.2 İkinci Türev İçin Orta Nokta Formülü

f fonksiyonu x_0 noktası civarındaki üçüncü mertebeden Taylor polinomu kalan terimi ile birlikte:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + f^{(4)}(\xi(x_0))(x - x_0)^4$$

oluşur, burada $\xi(x_0)$ sayısı x_0 ile x arasındadır. Şimdi x yerine sırasıyla $x_0 + h$ ve $x_0 - h$ yazalım, bu durumda $x_0 - h < \xi_{-1} < x_0 < \xi_1 < x_0 + h$ olmak üzere

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}h^3 + f^{(4)}(\xi_1)\frac{h^4}{24}$$

ve

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 - \frac{f'''(x_0)}{6}h^3 + f^{(4)}(\xi_{-1})\frac{h^4}{24}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + f''(x_0)h^2 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_1 + \xi_{-1})h^4$$

elde edilir. Buradan da aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} [f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{24} [f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})]$$

$f^{(4)}$ fonksiyonu $[x_0 - h, x_0 + h]$ aralığında sürekli ise Ara Değer Teoremi'ne göre ξ_{-1} ile ξ_1 arasında öyle bir sayı vardır ki $f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})$ sayısı $f^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(x)$ arasında olduğundan

$$f^{(4)}(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})}{2}$$

gerekecektir, burada ξ sayısı $x_0 - h$ ile $x_0 + h$ arasındadır. Dolayısıyla aşağıdaki İkinci Türev İçin Orta Nokta Formülü elde edilir:

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} [f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

burada ξ sayısı $x_0 - h$ ile $x_0 + h$ arasındadır. Hata terimi:

$$-\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi).$$

Bölüm 5

Nümerik İntegrasyon

5.1 Nümerik İntegrasyonun Temelleri

Nümerik integrasyon belirli integral hesabında anti-türevi ifadesinin elde edilmesinin zor olduğu durumlarda integral değerine bir yaklaşım bulmak için kullanılır.

$$\int_a^b f(x)dx \text{ integral değerine yapılan temel yaklaşım } \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

toplamı ile elde edilen nümerik alan hesabı metodudur.

Nümerik alan hesabı metodu temel olarak Lagrange interpolasyon polinomundan elde edilir: $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ gibi $n+1$ tane farklı nokta verilmiştir. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunu bu $n+1$ noktada kesen Lagrange interpolasyon polinomunun hata terimi ile $L_k(x)$ Lagrange bazı (ya da Lagrange katsayıları) şöyle tanımlanır:

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n (x - x_i) / \prod_{i=0, i \neq k}^n (x_k - x_i)$$

olarak tanımlanmak üzere

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) + \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$$

olarak verilir. Buradan $\xi(x)$ sayısı $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ noktaları ile dolayısıyla $[a, b]$ aralığında yer alan x 'e bağlı bir sabittir. (4.11) ifadesinin her iki tarafının a 'dan b 'ye integrali alınırsa $i = 0, 1, \dots, n$ için $a_i = \int_a^b L_i(x) dx$ olarak tanımlanmak üzere

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x)) dx$$

eşitliği elde edilir. Bu integral hesabında oluşan hata

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x))$$

ihmal edildiğinde

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i)$$

yaklaşımı bulunmuş olur.

Genel halde integral formullerine geçmeden önce eşit uzaklıklarla noktalar için birinci ve ikinci mertebeden Lagrange interpolasyon polinomlarını kullanarak elde edilen Yamuk ve Simpson kurallarını inceleyelim:

5.1.1 Yamuk Kuralı

$x_0 = a$ ve $x_1 = b$ olmak üzere $\int_a^b f(x) dx$ integrali göz önüne alınır. x_0 ve x_1 sayıları arasındaki uzaklık $h = x_1 - x_0 = b - a$ ve $\xi(x)$ sayısı ile x_1 arasında olmak üzere x_0 ve x_1 noktalarındaki $f(x)$ fonksiyonunu kesen birinci Lagrange polinomunun hata terimi ile beraber

$$f(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}f(x_1) + \frac{1}{2}f''(\xi(x))\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_1 - x_0)}$$

şeklinde yazılır. Bu ifadenin her iki yanını $x_0 = a$ 'dan $x_1 = b$ 'ye integre ederek

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}f(x_1) \right) dx + \frac{1}{2}f''(\xi(x)) \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_1 - x_0)} dx \quad (4.12)$$

Örnek 5.1.1

Yamuk kuralını kullanarak

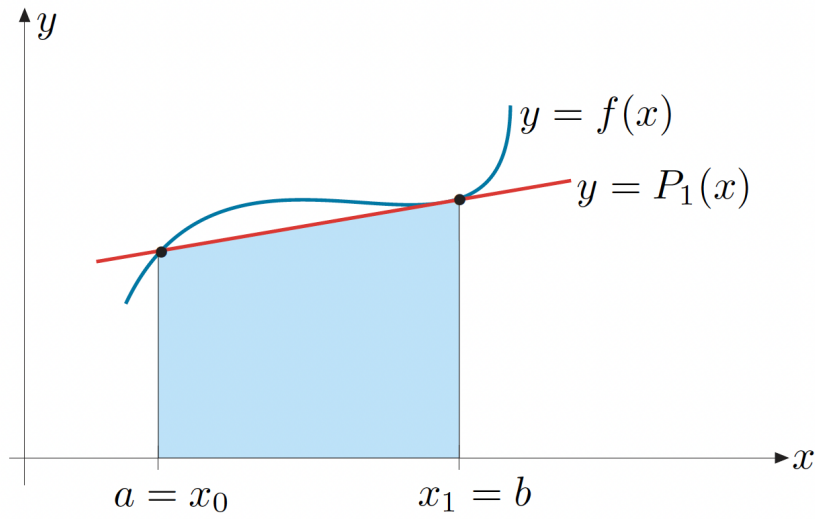
$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

integral değeri için bir yaklaşımda bulununuz ve bu yaklaşımda oluşan hata için bir üst sınır belirleyiniz.

Çözüm

$f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ dersek $a = x_0 = 0$, $b = x_1 = 1$ ve $h = b - a = 1 - 0 = 1$ olmak üzere istenen integral için yamuk kuralı kullanılarak yapılan yaklaşımdan

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = \frac{1}{2}[4 + 2] = 3.$$



Şekil 5.1: Yamuk Kuralı

elde edilir. Oluşan hata, ξ sayısı 0 ile 1 arasında olmak üzere

$$E = \left| \frac{h^3}{12} f''(\xi(x)) \right|$$

ifadesi ile verilmiştir.

$$f(x) = \frac{4}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{8x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{8(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

bulunur. Eğer $g(x) = \frac{8(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$ dersek $g'(x) = -\frac{96x(x^2-1)}{(1+x^2)^4}$ bulunur. Buna göre $g(x)$ fonksiyonunun ekstrem noktaları 0, 1 ve -1'dir. Biz bu noktalardan sadece verilen aralık üzerinde olan 0 ve 1 ile ilgileniriz.

$$|g(0)| = \left| \frac{8(0-1)}{(1+0)^3} \right| = 8 > 2 = |g(1)|.$$

Oluşan $|g(x)|$ fonksiyonu maksimum değerini $x = 0$ noktasında alır. Buradan,

$$E \leq \frac{h^3}{12} \max_{0 \leq \xi \leq 1} \left| \frac{8(3\xi^2-1)}{(1+\xi^2)^3} \right| = \frac{1}{12} \left| \frac{8(0-1)}{(1+0)^3} \right| = \frac{2}{3}$$

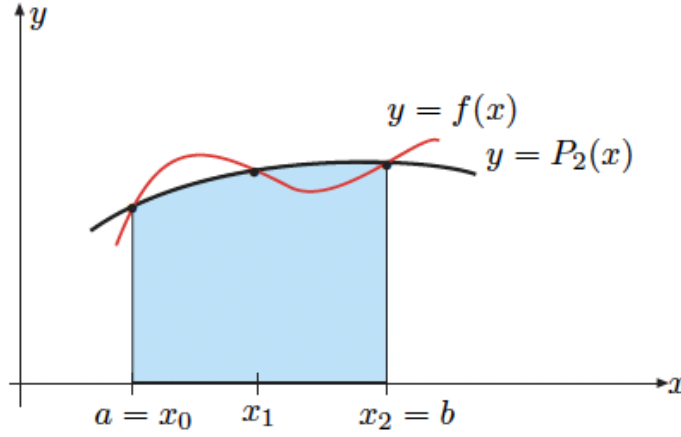
sonucuna ulaşılır.

5.2 Simpson Kuralı

$x_0 = a$ ve $x_2 = b$ olmak üzere $\int_a^b f(x) dx$ integrali göz önüne alınsın. Adım aralığın

$$h = \frac{x_2 - x_0}{2} = \frac{b - a}{2}$$

olmak üzere $[a, b]$ aralığı tam orta noktasından iki alt aralığa bölünsün ve Şekil 4.4'de gösterildiği gibi $x_1 = x_0 + h$ şeklinde üçüncü bir nokta tanımlansın.



Şekil 5.2: Simpson Kuralı

$\xi(x)$ sayısı x_0 ile x_2 arasında olmak üzere x_0, x_1 ve x_2 noktalarından geçen $f(x)$ fonksiyonunun ikinci Lagrange polinomu hata terimi ile birlikte

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2) + \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{6}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

olmak üzere bu ifadenin her iki yanının x_0 dan $b = x_2$ ye integralı alınırsa

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} \left(\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2) \right) dx \\ &\quad + \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{6}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx \end{aligned} \quad (5.1)$$

elde edilir. Yamuk kuralındaki gibi devam ederek hata teriminin integralı alınırsa $O(h^4)$ yakınsamasının olduğu görülür. Bununla beraber $f^{(iv)}$ türevini içeren ve daha hızlı $O(h^5)$ yakınsayan hata terimine sahip bir ifade x_1 civarında f fonksiyonunun üçüncü Taylor polinomu kullanarak aşağıdaki şekilde elde edilir:

$\xi(x) \in (x_0, x_2)$ olmak üzere f fonksiyonunun x_1 civarındaki üçüncü Taylor polinom hata terimi ile beraber,

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x-x_1)^2 + \frac{f^{(3)}(x_1)}{3!}(x-x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-x_1)^4$$

eşitliği ile verilir. Bu ifadenin her iki yanını $x_0 = a$ 'dan $x_2 = b$ 'ye integre edersek,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= f(x_1)(x_2-x_0) + \frac{f'(x_1)}{2}(x_2-x_0)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x_2-x_0)^3 + \frac{f'''(x_1)}{24}(x_2-x_0)^4 \\ &\quad + \frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} f^{(iv)}(\xi(x))(x-x_1)^4 dx \end{aligned}$$

elde edilir. $(x - x_1)^4$ terimi $[x_0, x_2]$ aralığında negatif olamayacağından verilen aralıkta işaret değiştiremez. Buna göre integraller için Ağırlıklı Ortalama Değer Teoremi'nden (x_0, x_2) aralığında bir ξ_1 sayısı için

$$\frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} f^{(iv)}(\xi)(x - x_1)^4 dx = \frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^4 dx$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla

$$\frac{f^{(iv)}(\xi_1)}{24} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^4 dx = \frac{f^{(iv)}(\xi_1)}{24} \cdot \frac{(x_2 - x_1)^5}{5}$$

elde edilir. Diğer taraftan $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$ için

$$(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_0)^2 = 0$$

olarak yazılabilir. Benzer şekilde,

$$(x_2 - x_1)^4 = (x_1 - x_0)^4 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^3 = (x_1 - x_0)^3 = 2h^3$$

ve

$$(x_2 - x_1)^5 = (x_1 - x_0)^5 = 2h^5$$

eşitlikleri (4.13) ve (4.14) ifadelerinde kullanılırsa

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(x_1) + \frac{f^{(iv)}(\xi_1)}{60}h^5$$

elde edilir. (4.15) eşitliğinde (4.10) ile verilen

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2} [f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{12}f^{(iv)}(\xi_2)$$

ifadesi ile ilgili kullanılırsa

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3} \left[\frac{1}{h^2} (f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^2}{12}f^{(iv)}(\xi_2) \right]$$

bulunur. Burada $z \in (x_0, x_2)$ için

$$f^{(iv)}(\xi) = \frac{5}{2}f^{(iv)}(\xi_1) - \frac{3}{2}f^{(iv)}(\xi_1)$$

olduğu kullanılırsa

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3}f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) - \frac{h^5}{90}f^{(iv)}(\xi)$$

ifadeleri ile verilen Simpson kuralı elde edilir. Simpson kuralı için hata terimi $f^{(iv)}$ türevini içerdiğinden integral değerine yaklaşımda bulunan $f(x)$ fonksiyonunun dördüncü türevinin sıfır olduğu, yani $f(x)$ en çok üçüncü dereceden bir polinom ise bu formül kullanılarak yapılan yaklaşım tam integral değerini verir.

Örnek 4.2.2

Aşağıda verilen $f(x)$ fonksiyonları için $\int_0^2 f(x) dx$ integraline yamuk ve Simpson kurallarını kullanarak yaklaşımda bulununuz ve yaklaşımları gerçek integral değeri ile kıyaslayınız.

- (a) x^2
- (b) x^4
- (c) $(x+1)^{-1}$
- (d) $\sqrt{1+x^2}$
- (e) $\sin x$
- (f) e^x

Çözüm: $[0, 2]$ aralığında yamuk ve Simpson kuralları sırası ile

$$\int_0^2 f(x) dx \approx f(0) + f(2)$$

ve

$$\int_0^2 f(x) dx \approx \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + f(2)]$$

şeklinde yazılır.

$f(x) = x^2$ olması durumunda yamuk kuralı ile yapılan yaklaşımdan ise

$$\int_0^2 x^2 dx = 0^2 + 2^2 = 4$$

ve Simpson kuralı kullanılarak yapılan yaklaşımdan ise

$$\int_0^2 x^2 dx \approx \frac{1}{3} [0^2 + 4 \cdot 1^2 + 2^2] = \frac{8}{3}$$

sonuçları elde edilirken integralin gerçek değeri

$$\int_0^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$$

dir.

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun integral değeri için bir yaklaşım Simpson kuralı ile yapıldığında sonucun gerçek integral değerine eşit olduğu görülür. Bunun nedeni Simpson kuralında hata teriminin $f^{(iv)}$ 'ün dördüncü türevini içermesidir. Daha açık olarak $f(x) = x^2$ fonksiyonunun dördüncü türevi sıfır olduğundan

yaklaşımda oluşan hata sıfır, yani yaklaşım tam olur.

Diğer sıklara ilişkin hesap yapıldığında aşağıdaki tablo elde edilir. Yamuk ve Simpson kuralları kullanılarak yapılan yaklaşımlar, gerçek integral değeri ile karşılaştırıldığında Simpson kuralı ile elde edilen sonuçların yamuk kuralı ile bulunanlara göre çok daha iyi olduğu gözlemlenir.

$f(x)$	(a) x^2	(b) x^4	(c) $(x+1)^{-1}$	(d) $\sqrt{1+x^2}$	(e) $\sin x$	(f) e^x
Gerç. Değer	2.667	6.400	1.099	2.958	1.416	3.694
Yamuk	4.000	16.000	1.333	3.326	2.958	6.327
Simpson	2.667	6.667	1.111	2.964	1.425	6.421

Tablo 5.1: Yamuk ve Simpson Kuralı ile Hesaplanan Yaklaşımlar

Örnek 4.2.3

Simpson kuralı kullanılarak

$$\int_{0.5}^{1.5} (x \ln x - \cos x) dx$$

integral değeri için bir yaklaşımda bulunuz ve bu yaklaşımda oluşan hata için bir üst sınır belirleyiniz.

Çözüm. $f(x) = x \ln x - \cos x$ dersek $a = x_0 = 0.5$, $b = x_2 = 1.5$ ve $h = \frac{(b-a)}{2} = \frac{(1.5-0.5)}{2} = 0.5$ olmak üzere istenen integralin Simpson kuralı kullanılarak yapılan yaklaşımından $x_1 = x_0 + h = 0.5 + 0.5 = 1.0$ değeri kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_{0.5}^{1.5} (x \ln x - \cos x) dx &\approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \\ &\approx \frac{0.5}{3} [f(0.5) + 4f(1.0) + f(1.5)] \\ &\approx \frac{0.5}{3} [f(0.5) + 4f(1.0) + f(1.5)] \\ &\approx -0.474675 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu metod kullanılarak yapılan yaklaşımda oluşan hata ξ sayısı 0.5 ile 1.5 arasında olmak üzere

$$E = \left| \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi) \right|$$

ifadesi ile verilmiştir.

$f(x) = x \ln x - \cos x$ için

$$f'(x) = 1 + \ln x + \sin x,$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \cos x,$$

$$f'''(x) = -x^{-2} - \sin x,$$

$$f^{(iv)}(x) = 2x^{-3} - \cos x$$

olarak bulunur. $g(x) = 2x^{-3} - \cos x$ dersek $g'(x) = -\frac{6}{x^4} + \sin x$ şeklinde bulunur. $0.5 \leq x \leq 1.5$ olmak üzere sinüs fonksiyonunun aldığı değerler 0 ile 1 arasındayken $-\frac{6}{x^4}$ ifadesi her zaman -1 'den küçük olur. Yani $g'(x) < 0$ dır. Buna göre $|g(x)|$ fonksiyonu maksimum değerini sınırı alır.

$$|g(0.5)| = |(0.5)^{-3} - \cos(0.5)| = 15.122 \geq 0.52186 = |(1.5)^{-3} - \cos(1.5)| = |g(1.5)|$$

olduğundan $g(x)$ fonksiyonu $0.5 \leq x \leq 1.5$ aralığında maksimum değerini 0.5 noktasında alır. Dolayısıyla

$$E \leq \frac{h^5}{90} \max_{0.5 \leq \xi \leq 1.5} |g(\xi)| = \frac{0.5^5}{90} |2(0.5)^{-3} - \cos(0.5)|$$

sonucunu elde ederiz. Bunu hesaplayarak:

$$\leq \frac{0.5^5}{90} \times 15.122 = \frac{0.03125 \cdot 15.122}{90} \approx 5.2507 \times 10^{-3}$$

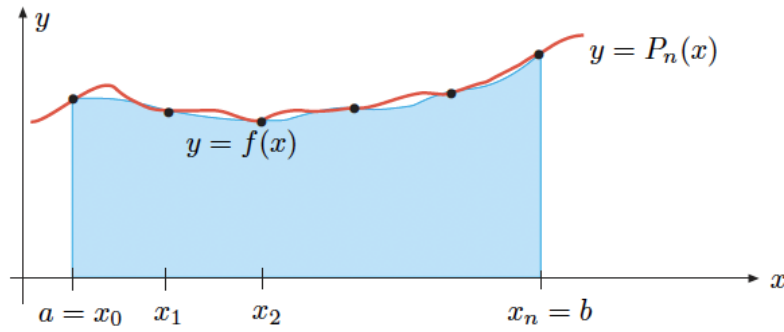
elde edilir.

5.3 Newton-Cotes Formülleri

Yamuk ve Simpson kuralları Newton-Cotes formülleri olarak bilinen nümerik integral hesaplama tekniklerinin özel halleridir. Newton-Cotes formüllerinin açık ve kapalı olmak üzere iki şekli vardır:

5.3.1 Kapalı Newton-Cotes Formülleri

$(n+1)$ -nokta Kapalı Newton-Cotes formülünde Şekil 4.5'de gösterildiği gibi $i = 0, 1, \dots, n$ için $a = x_0$, $x_n = b$ ve $h = \frac{b-a}{n}$ olmak üzere $x_i = x_0 + ih$ şeklinde tanımlanan eşit aralıklı noktalar kullanılır.



Şekil 5.3: Kapalı Newton-Cotes formülü

Formül:

$$a_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} dx$$

olmak üzere Lagrange interpolasyon polinomu ile yapılan

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

yaklaşımı kullanılarak elde edilir. Bu formüle kapalı denmesinin nedeni $[a, b]$ aralığının uç noktaları olan $x_0 = a$, $x_n = b$ sayılarının da formülde yer almasından kaynaklanır.

Teorem 4.2.4

$i = 0, 1, \dots, n$ için $x_0 = a, x_n = b$ ve $h = \frac{b-a}{n}$ olmak üzere

$$\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

ifadesi ile $(n+1)$ -nokta Kapalı Newton-Cotes formülü gösterilsin. Bu durumda bir $\xi \in (a, b)$ sayısı aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

Bir çift sayı için $f \in C^{n+2}[a, b]$ ise

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\xi) \int_0^n t^2(t-1) \cdots (t-n) dt.$$

Bir tek sayı için $f \in C^{n+1}[a, b]$ ise

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \int_0^n (t-1)(t-2) \cdots (t-n) dt.$$

n = 1: Yamuk Kuralı

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^2}{12} f''(\xi) \quad (\xi_0 \leq \xi \leq x_1).$$

n = 2: Simpson Kuralı

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{60} f^{(iv)}(\xi) \quad (x_0 \leq \xi \leq x_2).$$

n = 3: Simpson $\frac{3}{8}$ Kuralı

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80} f^{(iv)}(\xi) \quad (x_0 \leq \xi \leq x_3).$$

n = 4:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx = \frac{h}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] - \frac{8h^7}{945} f^{(vi)}(\xi) \quad (x_0 \leq \xi \leq x_4).$$

5.4 Açık Newton-Cotes Formülleri

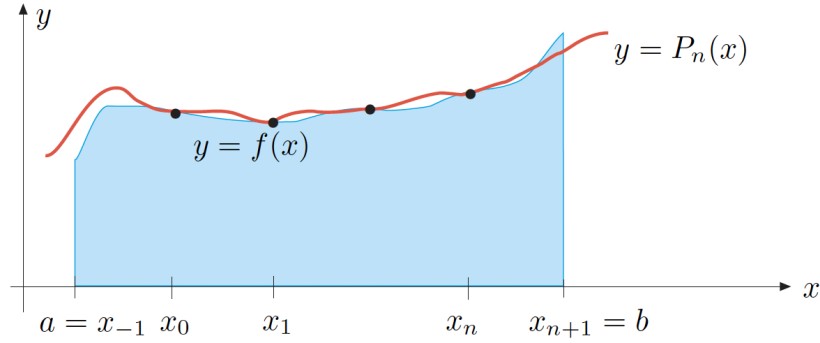
Kapalı Newton-Cotes formüllerinden farklı olarak açık Newton-Cotes formüllerinde $[a, b]$ aralığının n noktaları yaklaşım hesabında göz ardı edilerek her $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $h = \frac{b-a}{n+2}$ ve $x_0 = a + h$ olmak üzere $x_i = x_0 + ih$ şeklinde tanımlanan noktalar kullanılır. Buna göre $x_n = b - h$ olduğundan $x_{n-1} = a$ ve $x_{n+1} = b$ notasyonu kullanılırsa (Bkz. Şekil 4.6) formül:

$$a_i = \int_a^b L_i(x) dx$$

olmak üzere Lagrange interpolasyon polinomu kullanılarak yapılan

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_{n+1}}^{x_{-1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

yaklaşımı kullanılarak elde edilir.



Şekil 5.4: Açık Newton-Cotes formülü

Teorem 4.2.5

$x_{-1} = a$ ve $x_{n+1} = b$ ve $h = \frac{b-a}{n+2}$ olmak üzere

$$\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

açık Newton-Cotes Formülünü gösterebilir. Bu durumda bir $\xi \in (a, b)$ sayısı aşağıdaki eşitlikleri sağlayacak şekilde mevcuttur:

n bir çift sayı ve $f \in C^{m+2}[a, b]$ ise

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\xi) \int_{-1}^n t^n (t-1) \cdots (t-n) dt,$$

n bir tek sayı ve $f \in C^{m+1}[a, b]$ ise

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{-1}^n (t-1)(t-2) \cdots (t-n) dt.$$

Kapalı metotta olduğu gibi açık Newton-Cotes formüllerinde de çift n adım aralığı için daha yüksek hassaslık derecesi elde edilir.

En çok kullanılan açık Newton-Cotes formülleri hata terimleri ile birlikte aşağıda listelenmektedir:

n = 0: Orta Nokta Kuralı

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3}f''(\xi) \quad (x_{-1} < \xi < x_1).$$

n = 1:

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \frac{3h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{3h^3}{4}f''(\xi) \quad (x_{-1} < \xi < x_2).$$

n = 2:

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = \frac{4h}{3} [2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)] + \frac{14h^5}{45}f^{(iv)}(\xi) \quad (x_{-1} < \xi < x_3).$$

n = 3:

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = \frac{5h}{24} [11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)] + \frac{95h^5}{144}f^{(iv)}(\xi) \quad (x_{-1} < \xi < x_4).$$

Örnek 4.2.6

(4.16)-(4.19) eşitlikleri ile verilen kapalı Newton-Cotes formüllerini ve (4.20)-(4.23) ifadeleri ile verilen açık Newton-Cotes formüllerini kullanarak

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.292893322$$

integrali için yaklaşımlarda bulununuz.

Çözüm

Kapalı Newton-Cotes formülleri ile

- $n = 1$: $\frac{\pi}{4}2[\sin 0 + \sin \frac{\pi}{4}] \approx 0.277680818,$
- $n = 2$: $\frac{\pi}{8}3[\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{4}] \approx 0.29293264,$
- $n = 3$: $\frac{3}{8} [\sin 0 + 3 \sin \frac{\pi}{12} + 3 \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4}] \approx 0.29291070,$
- $n = 4$: $\frac{2}{45}[7 \sin 0 + 32 \sin \frac{\pi}{16} + 12 \sin \frac{\pi}{8} + 32 \sin \frac{3\pi}{16} + 7 \sin \frac{\pi}{4}] \approx 0.29289318.$

ve açık Newton-Cotes formülleri ile

- $n = 0$: $2 \cdot \frac{\pi}{8} \approx 0.30055887,$
- $n = 1$: $\frac{\pi}{12}2[\sin \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{6}] \approx 0.29798754,$
- $n = 2$: $\frac{1}{2}[2 \sin 0 + 2 \sin \frac{\pi}{10} + 2 \sin \frac{3\pi}{16}] \approx 0.29285866,$
- $n = 3$: $\frac{1}{24}[11 \sin \frac{\pi}{20} + \sin \frac{3\pi}{20} + 11 \sin \frac{\pi}{4}] \approx 0.29286923.$

yaklaşımları elde edilir. Bu sonuçlar aşağıdaki tabloda özetlenmektedir.

n	0	1	2	3	
Kapalı Formül		0.27768018	0.29293264	0.29291070	0.29289318
Hata		0.01521303	0.00003942	0.00001748	0.00000004
Açık Formül	0.30055887	0.29798754	0.29285866	0.29286923	
Hata	0.00766565	0.00509432	0.00003456	0.00002399	

Örnek 4.2.7

$n = 3$ olmak üzere Açık Newton-Cotes formülünü kullanarak

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

integrali için bir yaklaşımda bulununuz.

Çözüm

$x_{-1} = a = -1$ ve $x_4 = b = 1$ olduğundan $n = 3$ için

$$h = \frac{b-a}{n+2} = \frac{1-(-1)}{3+2} = \frac{2}{5} = 0.4$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} x_0 &= a = -1, & x_1 &= x_{-1} + h = -0.6, & x_2 &= x_{-1} + 2h = -0.2, \\ x_3 &= x_{-1} + 3h = 0.2, & x_4 &= x_{-1} + 4h = 0.6, & x_5 &= b = 1 \end{aligned}$$

ve

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}$$

olmak üzere Açık Newton-Cotes formülü kullanılarak istenen integral değerini hesaplamak için yapılacak yaklaşım

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{5}{24} h [11f(-0.6) + f(-0.2) + f(0.2) + 11f(0.6)] \approx 2.0581$$

şeklinde elde edilir.

4.3 Bileşik Nümerik İntegrasyon

İntegrasyon aralığı çok geniş olduğunda Newton-Cotes formülleri kullanarak yapılan yaklaşım genellikle kullanışlı değildir. Çünkü Newton-Cotes formülleri kullanılarak geniş adım uzunluğuna sahip bir integral yaklaşımında yüksek dereceden formüller kullanılır ve bu formüllerdeki katsayı değerlerinin hesaplanması zordur. Bu bölümde düşük mertebeden Newton-Cotes formüllerini verilen integrasyon aralığını eşit parçalara bölererek uygulamak suretiyle integral değerine yapılan yaklaşımlar üzerinde duracağız.

Örnek 4.3.1

Simpson kuralı kullanılarak $\int_0^4 e^x dx$ integraline yapılan yaklaşım değerini yine Simpson kuralı ile $\int_0^2 e^x dx$ ve $\int_2^4 e^x dx$ integral yaklaşım değerlerini toplamak sureti ile elde edilen sonuca ile kıyaslayınız. Benzer şekilde $\int_0^1 e^x dx$, $\int_1^2 e^x dx$, $\int_2^3 e^x dx$ ve $\int_3^4 e^x dx$ integralleri için ayrı ayrı Simpson kuralını uygulayıp toplayarak elde edilen yaklaşım değeri ile daha önceden elde edilen sonuçları karşılaştırınız.

Çözüm

$h = \frac{x_2 - x_0}{2} = \frac{4-0}{2} = 2$ olmak üzere $x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + h = 2$, $x_2 = 4$ için Simpson kuralı kullanılarak

$$\int_0^4 e^x dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] = \frac{2}{3} [e^0 + 4e^2 + e^4] = \frac{2}{3} [1 + 4e^2 + e^4] = 56.76958$$

yaklaşımı elde edilir. Diğer taraftan verilen integralin gerçek değeri

$$\int_0^4 e^x dx \approx e^4 - e^0 = 53.59815$$

olduğundan bu yaklaşımda oluşan mutlak hata

$$\text{Mutlak Hata} = |53.59815 - 56.76958| = 3.17143$$

şeklinde elde edilir. Şimdi

$$\int_0^4 e^x dx = \int_0^2 e^x dx + \int_2^4 e^x dx$$

olduğu kullanılarak $[0, 2]$ ve $[2, 4]$ aralıkları için $h = 1$ alınarak eşitliğin sağında bulunan integrallere ayrı ayrı Simpson kuralı uygulansın. Buna göre

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^x dx &\approx \frac{1}{3} [f(0) + 4f(1) + f(2)] = \frac{1}{3} [e^0 + 4e^1 + e^2] = \frac{1}{3} (1 + 4e + e^2) \\ &\approx 4.67077 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_2^4 e^x dx &\approx \frac{1}{3} [f(2) + 4f(3) + f(4)] = \frac{1}{3} [e^2 + 4e^3 + e^4] \\ &\approx 53.16858 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Toplamda:

$$\int_0^4 e^x dx \approx \frac{1}{3} (1 + 4e + e^2) + \frac{1}{3} (e^2 + 4e^3 + e^4) \approx 53.86385$$

sonucuna ulaşılır. Bu yaklaşımda oluşan mutlak hata,

$$\text{Mutlak Hata} = |53.59815 - 53.86385| = 0.26570$$

olarak elde edilir. Bu ise bize $[0, 4]$ aralığını eşit iki alt aralığa bölerken yapılan yaklaşımın, ilk adımda yapılan yaklaşımdan daha iyi olduğunu gösterir. Benzer şekilde,

$$\int_0^4 e^x dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^2 e^x dx + \int_2^3 e^x dx + \int_3^4 e^x dx$$

olduğu kullanılarak $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ ve $[3, 4]$ aralıkları için $h = \frac{1}{2}$ alınarak eşitliğin sağında bulunan integrallere ayrı ayrı Simpson kuralı uygulansın. Buna göre:

$$\begin{aligned} \int_0^4 e^x dx &\approx \frac{1}{6} \left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right) + \frac{1}{6} \left(f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) \right) \\ &+ \frac{1}{6} \left(f(2) + 4f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3) \right) + \frac{1}{6} \left(f(3) + 4f\left(\frac{7}{2}\right) + f(4) \right) \\ &\approx \frac{1}{6} (e^0 + 4e^{1/2} + e^1) + \frac{1}{6} (e^1 + 4e^{3/2} + e^2) \\ &+ \frac{1}{6} (e^2 + 4e^{5/2} + e^3) + \frac{1}{6} (e^3 + 4e^{7/2} + e^4) = 53.61622 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu yaklaşımda oluşan mutlak hata:

$$\text{Mutlak Hata} = |53.59815 - 53.61622| = 0.01807$$

olarak elde edilir. Buradan, verilen aralığı daha fazla alt aralıklara ayırarak her bir aralığa Simpson kuralı uygulamak sureti ile yapılan yaklaşımların, aralık sayısının küçülmesine bağlı olarak daha iyi hale geldiği sonucu gözlemlenir. Benzer olgu alt aralıklar için Simpson yerine daha önceden verilen yamuş ve ortanokta kuralı uygulanması durumunda da geçerlidir.

Genel olarak $\int_a^b f(x) dx$ integral değerine bir yaklaşımla bulunmak için $[a, b]$ aralığını, n çift sayı olmak üzere, n alt aralığa bölüp, her bir aralıkta Simpson kuralı uygulanarak bileşik Simpson kuralı elde edilmiş olur.

section*Teorem 4.3.2 (Qua, sayfa 384). $f \in C^4[a, b]$, n bir çift sayı olmak üzere,

$h = \frac{b-a}{n}$ ve her $j = 0, 1, \dots, n$ için $x_j = a + jh$ olarak verilsin. $\xi \in (a, b)$ olmak üzere, bileşik Simpson

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{h}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j-1}) + f(b) \right] \\ &\quad - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(iv)}(\xi(x)) \end{aligned}$$

ifadesi ile verilir.

Bileşik Simpson Kuralının Hata Terimi

Bileşik Simpson kuralının hata terimi $O(h^4)$, standart Simpson kuralının hata terimi ise $O(h^5)$ 'dir. Bununla beraber bu iki sonuç karşılaştırılabilir. Çünkü, bileşik Simpson kuralında h adım uzunluğu n bir çift tam sayı olmak üzere $h = \frac{b-a}{n}$ iken, standart Simpson kuralında $h = \frac{b-a}{2}$ gibi bir sabit-olmamakta. Bileşik Simpson kural bize h adım uzunluğunu istediğimiz ölçüde kısıtlamakta.

Daha önceden de vurgulandığı üzere verilen aralığı alt aralıklara ayırıp her bir alt aralığı Newton-Cotes formüllerinden herhangi bir tanesini uygulamak suretiyle farklı bileşik integral kuralları elde edilebilir. Biz burada yukarıda zikredilen prosedüre uygun olarak sırasıyla (4.16) ve (4.20) eşitlikleri ile verilen ifade ve orta nokta kurallarını kullanılarak elde edilen formları kullanacağız.

Teorem 4.3.3

(Qua, sayfa 384). $f \in C^2[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$ ve her $j = 0, 1, \dots, n$ için $x_j = a + jh$ olarak verilsin. $\xi \in (a, b)$ olmak üzere bileşik yamuş kuralı n alt aralık için hata terimi ile birlikte

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b) \right]$$

ifadesi ile verilir.

Teorem 4.3.4

(Qua, sayfa 384). $f \in C^2[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n+2}$ ve her $j = 0, 1, \dots, n+1$ için $x_j = a + jh$ olarak verilsin. $\xi \in (a, b)$ olmak üzere bileşik orta nokta kuralı $(n+2)$ alt aralık için hata terimi ile birlikte

$$\int_a^b f(x) dx = 2h \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j}) + \frac{b-a}{6} h^2 f''(\xi(x))$$

ifadesi ile elde verilir.

Bileşik Simpson ve bileşik orta nokta kuralını kullanabilmemiz için alt aralık sayısının çift olması gerekir. Diğer taraftan bileşik yamuş kural kullanılarak yapılan yaklaşımlarda alt aralıkların çift ya da tek sayıda olması zorunluluğu bulunmamaktadır.

Örnek 4.3.5

(a) Bileşik yamuş ve (b) bileşik Simpson kurallarını kullanarak

$\int_0^\pi \sin x \, dx$ integraline 0.00002 veya daha fazla bir hassaslıkta yaklaşımda bulunmak için alınması gere

Çözüm.

(a) $[0, \pi]$ aralığında $f(x) = \sin x$ fonksiyonuna bileşik yamuş kuralı uygulanırken oluşacak hata

$$\left| \frac{\pi h^2}{12} f''(\xi) \right| = \left| \frac{\pi h^2}{12} (-\sin \xi) \right| = \frac{\pi h^2}{12} |\sin \xi| \leq \frac{\pi h^2}{12} < 0.00002$$

şeklindedir. Verilen hassaslık ile bir yaklaşım yapılması istendiğinden

$$\frac{\pi h^2}{12} < 0.00002$$

eşitsizliğini sağlayan h değeri, daha doğrusu $h = \frac{\pi}{n}$ olduğu kullanılarak

$$\frac{\pi^3}{12n^2} < 0.00002$$

ifadesini gerçekleştiren n değeri bulunmalıdır. Bu ise

$$n > \left(\frac{\pi^3}{12 \cdot 0.00002} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 359.44$$

olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla bileşik yamuş kuralı kullanılarak istenilen hassaslıkta bir yaklaşım yapabilmek için alınması gereken aralık sayısı $n \geq 360$ 'dır. Bu aralık sayısına karşılık $h = \frac{\pi}{360}$ adım uzunluğu elde edilir.

(b) $[0, \pi]$ aralığında $f(x) = \sin x$ fonksiyonuna bileşik Simpson kuralı uygulanırken oluşacak hata

$$\left| \frac{\pi^4}{180} f^{(iv)}(\xi) \right| = \left| \frac{\pi^4}{180} \sin \xi \right| \leq \frac{\pi^4}{180} < 0.00002$$

formundadır. Verilen hassaslık ile bir yaklaşım yapılması istendiğinden

$$\frac{\pi^4}{180} < 0.00002$$

eşitsizliğini sağlayan h değeri, daha doğrusu $h = \frac{\pi}{n}$ olduğu kullanılarak

$$\frac{\pi^5}{180n^4} < 0.00002$$

ifadesini gerçekleştiren n değeri bulunmalıdır. Bu ise

$$n > \left(\frac{\pi^5}{180 \cdot 0.00002} \right)^{\frac{1}{4}} \approx 17.07$$

olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla bileşik Simpson kuralı kullanılarak istenilen hassaslıkta bir yaklaşım yapabilmek için alınması gereken aralık sayısı bileşik yamuş yöntemindekinden çok daha az olarak $n \geq 18$ şeklinde elde edilir. Bu aralık sayısına karşılık $h = \frac{\pi}{18}$ şeklinde bulunur.

$$\int_0^\pi \sin x \, dx \approx \frac{\pi}{54} \left[2 \sum_{j=1}^8 \sin \left(\frac{j\pi}{9} \right) + 4 \sum_{j=1}^9 \sin \left(\frac{(2j-1)\pi}{18} \right) \right] = 2.000104$$

sonucu elde edilir. Gerçek integral değeri

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$$

olduğundan yapılan yaklaşım aslında 10^{-5} hassaslıktadır. Örnek 4.3.5'den görüldüğü üzere Simpson kuralını kullanarak bir yaklaşımda bulunmak verilen diğer metotlara göre daha az işlem yükü gerektirir. Bileşik Simpson ve bileşik yamuş kurallarını karşılaştırmak bakımından aşağıdaki örneğe bileşik yamuş kural $h = \frac{\pi}{18}$ için uygulanırsa

$$\int_0^\pi \sin x \, dx \approx \frac{\pi}{36} \left[2 \sum_{j=1}^{17} \sin \left(\frac{j\pi}{18} \right) + \sin(0) + \sin(\pi) \right] = 1.9949205$$

elde edilir. Bileşik yamuş kuralının işlem yükü bileşik Simpson metodu ile aynı olmasına karşın yapılan yaklaşımın bu metotta sadece 5×10^{-3} hassaslıkta olduğu sonucu görülür.

Örnek 4.3.6

$h = 1$ olmak üzere uygun bir bileşik integral kuralını kullanarak

$$\int_0^3 (5 + \cos x) \, dx$$

integrali için bir yaklaşımda bulununuz. Bu yaklaşımda oluşan bağlı hatayı hesaplayınız.

Çözüm.

$h = 1$ olduğundan $x_0 = a = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ve $x_3 = b = 3$ dolayısıyla $n = 3$ tür. n sayısı tek olduğundan kullanılabilecek tek kural bileşik yamuş kuralıdır. Buna göre $f(x) = 5 + \cos x$ dersek

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x) dx &\approx \int_0^3 (5 + \cos x) dx \approx \frac{1}{2} [f(0) + 2(f(1) + f(2)) + f(3)] \\ &\approx \frac{1}{2} [5 + \cos 0 + 2((5 + \cos 1) + (5 + \cos 2)) + 5 + \cos 3] \\ &\approx 15.129\end{aligned}$$

elde edilir. İntegralin gerçek değeri

$$\int_0^3 (5 + \cos x) dx = (5x + \sin x) \Big|_0^3 = (5 \cdot 3 + \sin 3) - (5 \cdot 0 + \sin 0) = 15 + \sin 3 \approx 15.141$$

olduğundan bu yaklaşımda oluşan bağlı hata

$$\left| \frac{15.141 - 15.129}{15.141} \right| = \frac{4}{5047} \approx 7.9255 \times 10^{-4}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 4.3.7

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

integrali bileşik orta nokta kuralı kullanılarak hesaplanmış ve oluşan hata için bir sınırın 10^{-5} olduğu görülmüştür. Buna göre h kaç olmalıdır.

Çözüm.

Bileşik orta nokta kuralı kullanılarak yapılan bir yaklaşımda oluşan hata $a = 1$, $b = 2$, $h = \frac{b-a}{n+2}$ ile $1 \leq \xi \leq 2$ ve $f(x) = x^{-1}$ olmak üzere

$$\frac{b-a}{6} h^2 f''(\xi)$$

ifadesi ile verilir. Buna göre $f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3}$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}\left| \frac{b-a}{6} h^2 f''(\xi) \right| &= \left| \frac{2-1}{6} \frac{(2-1)^2}{(n+2)^2} 2 (\xi^{(x)})^{-3} \right| \\ &\leq \frac{1}{3(n+2)} \max_{1 \leq \xi \leq 2} |(\xi)^{-3}| \leq \frac{1}{3(n+2)^2}\end{aligned}$$

elde edilir. Soruda

$$\frac{1}{3(n+2)^2} \leq 10^{-5}$$

olarak verildiğinden, yukarıdaki ifadeyi sağlayan n değerleri $180.57419 \leq n$ şeklinde bulunur. Bu metod n 'in çift olmasını gerektirdiğinden $n \geq 182$, dolayısıyla

$$h = \frac{2-1}{182+2} = \frac{1}{184}$$

sonucuna ulaşılır.

5.5 Bileşik İntegral Hesabında Oluşan Yuvarlama Hataları

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

integraline 2×10^{-5} yakınsaklıkta bir yaklaşımda bulunmak için bileşik yamuş kuralı kullanıldığında 360 alt aralık, bileşik Simpson kullanıldığında ise sadece 18 alt aralık gerektiği **Örnek 4.3.5**'den görülmektedir. Bileşik Simpson kuralında daha az işlem yapılması bu metot kullanılarak yapılan bir yaklaşımda oluşacak yuvarlama hatasını, bileşik yamuş kuralı kullanılarak yapılan yaklaşımın göre daha az olacağı kanısını uyandırır. Bununla beraber tüm bileşik integral kurallarını kullanarak yapılan yaklaşımlarda yuvarlama hatasının büyüklüğü için elimizde bulunan sayı ile kıyaslanamaz.

Yukarıda anlatılan olayı ortaya koymak için $[a, b]$ aralığında f fonksiyonuna ait bir alt aralık için bileşik Simpson kuralı uygulayalım ve yuvarlama hatası için bir üst sınır belirleyelim, $i = 0, 1, \dots, n$ için $f(x_i)$ değeri e_i yuvarlama hatası ile birlikte hesaplanmış olsun.

$$f(x_i) = \tilde{f}(x_i) + e_i$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla bileşik Simpson kuralı uygulanarak yapılan bir yaklaşımda oluşacak toplam $e(h)$ yuvarlama hatası için,

$$\begin{aligned} e(h) &= \left| \frac{h}{3} \left[e_0 + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} e_{2j} + 4 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} e_{2j-1} + e_n \right] \right| \\ &\leq \frac{h}{3} \left[|e_0| + \sum_{j=1}^{(n/2)-1} |e_{2j}| + 4 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} |e_{2j-1}| + |e_n| \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer her $i = 0, 1, \dots, n$ için $|e_i| < \epsilon$ ise

$$e(h) \leq \frac{h}{3} \left[\epsilon + 2 \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \epsilon + 4 \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \epsilon + \epsilon \right] = \frac{h}{3} 3n\epsilon = nh\epsilon$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $n = \frac{b-a}{h}$ yani $nh = b - a$ olduğu yukarıdaki eşitsizlikte kullanılırsa

$$e(h) \leq (b - a)\epsilon$$

ifadesi elde edilir. Yani hata sınırı h değerinden dolayısıyla alınan alt aralık sayısı n den bağımsızdır. Dolayısıyla, her ne kadar yakınsaklığı artırmak için verilen aralığı mümkün olduğunca çok alt aralığa bölerek bileşik integral kuralını uygulamak gerekse de yapılan bu çok sayıda işlem, oluşacak yuvarlama hatasının artmasına sebep olmaz. Bu durum daha önceden anlatılan nümerik türev prosedürlerinde geçerli değildir.

Bölüm 6

Adi Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümü

Adi Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümü

Gerçek hayattaki bir çok problem, türevler arasındaki ilişkiyi görmek daha kolay olduğundan diferansiyel denklemlerle modellenir. Örneğin Newton'un ikinci kanunu

$$f = Ma$$

ivmenin hızın zamanla değişimi olduğu hatırlatılarak

$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{f}{M}$$

şeklinde birinci dereceden, veya hızın da mesafenin türevi olduğu hatırlanarak

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a = \frac{f}{M}$$

şeklinde ikinci dereceden bir adi diferansiyel haline getirilebilir. İvmenin sabit olması halinde bu denklemlerin analitik çözümleri sırasıyla

$$s(t) = v_0t + \frac{1}{2}at^2 + s_0$$

şeklinde olup, çözümlerde yer alan v_0 ve s_0 sabitleri sırasıyla hız ve konumun başlangıç değerleridir. Bu denklemler kullanılarak, bağımsız değişken olan t zamanının herhangi bir değerinde v hızının ve s konumunun sayısal değerleri elde edilebilir.

Birçok diferansiyel denklem analitik olarak çözülebilir ve bulunan genel çözümde denklemin derecesine eşit sayıda keyfi integral sabiti yer alır. Sayet sabit sayısına koşul ortaya konulursa sabitlerin değerlerini elde etmek mümkün olur.

Bütün koşulların bağımsız değişkenin aynı değeri için belirlenmesi halinde problem “başlangıç değer problemi” olarak adlandırılır. Koşullar bağımsız değişkenin iki farklı değerinde, özellikle ilgilendirilen bir bölgenin sınırlarında verildiği takdirde problem “sınır değer problemi” olarak nitelendirilir.

Bu bölümde adi diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan sayısal teknikler ele alınacaktır. Problemin sayısal çözümünü için gerekli sayıda koşul bilinmesi ve bu koşulların sayısal çözüme kullanılması gereklidir.

Çözüm tekniklerine Taylor serisi yöntemleri ile başlanacaktır. Taylor serisi açısından iyi bir yöntemi olmak kaydıyla yukarıda belirtilen bir diğer yaklaşım ise analiz yöntemi olarak gösterilebilir.

Önce birinci- dereceden başlangıç değer problemi incelenecek, daha sonra yüksek dereceden problemler ve sınır değer probleminde ise çözüm bir sınırdan başlatılarak diğer sınırda doğru ilerletilir ve bu sınırdaki koşul sağlamaya çalışılır. Bu da ancak iteratif olarak gerçekleşir.

Bir diferansiyel denklemin çözümünde gerçekten bir çözümü olduğundan ve bu çözümün tek olduğundan emin olunmalıdır. Bu husus $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ eşitliğindeki $f(x, y)$ fonksiyonunun Lipschitz şartının sağlanmasını gerektirir:

$f(x, y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasını içine alan bir R bölgesinde tanımlı ve sürekli olduğunu varsayalım.

Bölgenin kapalı ve bir başka doğrultgente sınırlı olduğunu kabul edelim. Şayet R bölge-
sindeki bütün x, y_1 ve y_2 ler için

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L|y_1 - y_2|$$

eşitsizliğini sağlayacak bir L varsa $f(x, y)$ fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlar. Bu bölümdeki bütün örneklerde ve problemlerde bu koşul sağlanmaktadır.

Bir sınır-değer probleminin çözümünün var ve tek olmasını için benzeri koşullar söz konusudur.

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= pu' + qu + r, \quad a \leq x \leq b \\ u(a) &= u_L, \quad u(b) = u_R \end{aligned}$$

biçimindeki bir linear problem, şayet: - p, q ve r büyüklükleri $[a, b]$ aralığında sürekli ise ve - $[a, b]$ aralığında $q > 0$ ise çözümü vardır ve tektir.

6.1 4.2 Taylor-serisi yöntemi

Bilindiği gibi Taylor serisi, çoğu fonksiyonu kuvvet serisi şeklinde ifade etmenin bir yoludur. $x = a$ civarındaki Taylor açılımında $(x-a)$ büyüklüğünün üzerinden oluşan terimlerin katsayıları fonksiyonun türevlerinin $x = a$ daki değerlerini içerir. Bunun anlamı, bir fonksiyonun ve türevlerinin $x = a$ noktasındaki değerlerini biliyorsak bu fonksiyonun bütün x noktalarındaki değerlerini aynı değerleri verecek bir kuvvet serisinin yazılabileceğidir. Buradaki incelemelerde $x = a$ yerine x kullanılacaktır.

Bir $y(x)$ fonksiyonunun birinci türevi $y' = f(x, y)$ şeklinde ve fonksiyonun başlangıç değeri de $y(x_0)$ şeklinde verilmeli olsun. Bu bilgiler kullanılarak $y(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ civarındaki Taylor açılımı yazılabilir. Bu açılım için $y'(x) = f(x, y)$ büyüklüğün istenilen dereceden türevlerine ulaşmak gerekirken $y(x_0)$ bazı değerleri hesaplanır. Ancak $y(x)$ türevinde ve y değerinde bilinmeyen yerine takas etmek/mevcut değerler cinsinden ve y_n daha küçük bilgilere ulaşılır.

Örnek olarak,

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad y(0) = -1 \quad (4.1)$$

problemini ele alalım. Bu denklemden analitik çözümü,

$$y(x) = -3e^{-x} - 2x + 1$$

şeklinde olup $x = x_0$ 'daki Taylor açılımı,

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

şeklinde olup $x - x_0 = h$ alınırsa,

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{y''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots (4.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $y(x_0)$ teriminin değeri başlangıç şartından $y(0) = -1$ olarak bilinmektedir. (Açılım $x = 0$ da yapıldığından bu örnekteki seri aslında bir Maclaurin serisidir.) Serideki ikinci terimin katsayısı (4.1) denklemin de $x = 0$ ve $y = -1$ konularak

$$y'(x_0) = y'(0) = -2 \cdot (0) - (-1) = 1$$

şeklinde elde edilebilir.

İkinci veya daha yüksek dereceden türevler, birinci türev için verilen (4.1) eşitliğinden ardarda türevler alınarak elde edilecektir. Bu türevlerin değerleri $x = 0$ da hesaplanarak serinin yüksek dereceden terimlerin katsayıları elde edilir:

$$y''(x_0) = -2 \rightarrow y'''(x_0) = -3$$

Böylece h noktasında fonksiyonun değerini elde etmek için serin çözümü

$$y(x) = -1 + 1.0h - 1.5h^2 + 0.5h^3 - 0.125h^4 + \text{hata}$$

şeklinde yazılır. Aşağıdaki tabloda $x = 0.6$ ile $x = 0.2$ arasındaki sayısal ve analitik çözümler yer almaktadır.

Tablo 6.1: Analitik ve Sayısal Çözümler

x	4. türeğe kadar			5. türeğe kadar	
	Analitik	$y(x)$	Hata	$y(x)$	Hata
0.00	-1.00000	-1.00000	0.00000	-1.00000	0.00000
0.10	-0.91451	-0.91450	0.00000	-0.91450	0.00000
0.20	-0.85619	-0.85620	-0.00001	-0.85619	0.00000
0.30	-0.82245	-0.82251	-0.00006	-0.82245	0.00000
0.40	-0.81096	-0.81120	-0.00024	-0.81094	-0.00002
0.50	-0.81959	-0.82031	-0.00072	-0.81953	-0.00006
0.60	-0.84643	-0.84820	-0.00177	-0.84626	-0.00018

Görüldüğü gibi $x < 0.3$ için uyum iyi iken $x > 0.3$ halinde fark giderek artmaktadır. Seride daha fazla terim alınması halinde uyumlu bölgenin genişleyeceği açıktır. Örneğin seride

$$y(x) = -1 + 1.0h - 1.5h^2 + 0.5h^3 - 0.125h^4 + 0.025h^5 + \text{hata}$$

şeklinde beşinci dereceye kadar türevlerin alınması halinde sonuçlar tablonun sağ kolonlarında görülmektedir.

Bu hesaplatı hata serideki kullanılan en son terimden sonraki terim değeri 0 ile x arasındaki herhangi bir noktada hesaplanarak elde edilebilir:

$$\text{hata} = \frac{x^5}{120} y^{(5)}(\xi) = \frac{x^5}{120} \times 3, \quad 0 < \xi < x$$

Son noktada hatanın en büyük olacağı düşüncesiyle hatanın tahmini değeri $x = 0.6$ noktasında

$$\text{hata} = \left(\frac{(0.6)^3}{120} \right) \times 3 = 0.00194$$

olarak elde edilir ki tabloda mevcut hata değerine yakındır.

$y'(x)$ türevini ifade eden fonksiyonun yukarıdaki gibi basit olmadığı hallerde yüksek dereceden türevlerin hesaplanması da kolay olmaz. Bilgisayarlar bu gibi türevleri hesaplayacak şekilde programlanmamaktadır. Maple ve Mathematica gibi yazılımlarla türevleri elde etmek mümkündür.

Örnek 1

Diferansiyel denklem:

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

Analitik çözümü:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hx_0^2 + \frac{h^2}{3} \left[x_0^2 + \frac{h^3}{3} \right]$$

x_0 noktasında ardarda türevler:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} = x_0^2, \quad \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x_0} = 2x_0, \quad \left. \frac{d^3y}{dx^3} \right|_{x_0} = 2, \quad \left. \left(\frac{d^4y}{dx^4} \right) \right|_{x_0} = 0$$

olup, Taylor açılımı:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hx_0^2 + h^2x_0 + \frac{h^3}{3}$$

Örnek 2

Diferansiyel denklem:

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

Analitik çözümü:

$$y(x_0 + h) = y(x_0)e^{2h}$$

Daha ileri türevler:

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

ve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(2y) = 2\frac{dy}{dx} = 4y$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(4y) = 4\frac{dy}{dx} = 8y$$

...

Taylor açılımı:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + 2hy(x_0) + \frac{4h^2y(x_0)}{2!} + \frac{8h^3y(x_0)}{3!} + \dots$$

Analitik çözümdeki eksponensiyel ifadenin seri açımı:

$$e^{2h} = 1 + 2h + \frac{(2h)^2}{2!} + \frac{(2h)^3}{3!} + \dots$$

olup Taylor açılımının analitik çözümle aynı çözümü verdiği görülmektedir. Ancak çözümün seri olarak verilmesi halinde hassasiyet seride alınacak terim sayısına bağlı olacaktır.

Örnek

Diferansiyel denklem:

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

Analitik çözümü:

$$y = -(x + 1) + Ce^x$$

Başlangıç şartı $y(x_0)$ olmak üzere C hesaplanarak:

$$y = -x - 1 + [1 + x_0 + y(x_0)]e^{-x_0}e^x$$

Veya $x_0 + h$ noktasındaki değer:

$$y(x_0 + h) = -x_0 - h - 1 + [1 + x_0 + y(x_0)]e^h$$

olur. Türevler,

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(x + y) = 1 + y$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(1 + y) = 1 + y$$

şeklinde elde edilir. Taylor Açılımı,

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + 2h[x_0 + y(x_0)] + \frac{h^2}{2}[x_0 + y(x_0)] + \frac{h^3}{6}[x_0 + y(x_0)] + \dots$$

veya

$$y(x_0 + h) = -x_0 - h - 1 + [x_0 + y(x_0)] \left(1 + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots \right)$$

şeklinde olur. Buradaki köşeli parantez içinde yer alan terim aslında e^h eksponansiyel büyüklüğünün açılımı olup, yine Taylor açılımıyla analitik çözümün aynının elde edildiği, sadece çözümün seri forma verildiği görülmektedir.

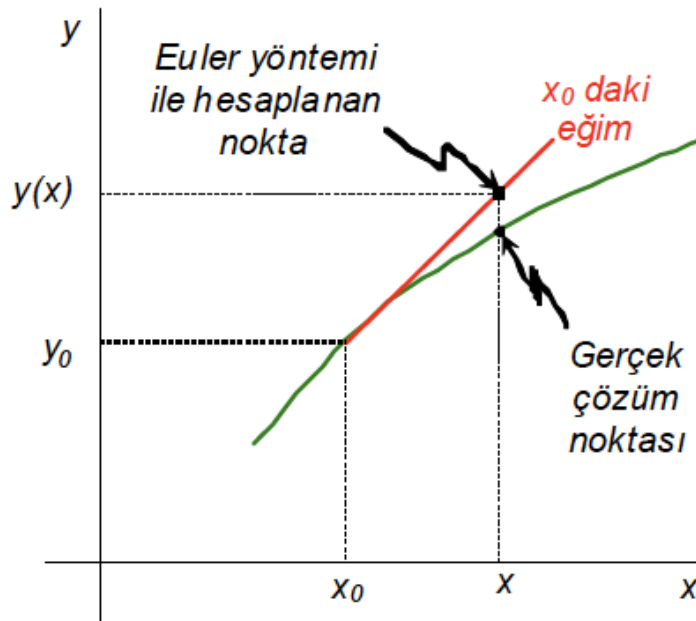
4.3 Euler Yöntemi

Euler yöntemi, Taylor serisinin yalnızca birinci dereceden terimini kullanan bir yöntemdir:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \text{hata}$$

$$\text{hata} = \frac{h^2}{2}y''(\xi) = O(h^2)$$

Bu ifade şu şekilde düzenlenirse, fonksiyonun x noktasındaki değerlerinin $[y(x_0)]$ noktasından çizilen bir teğet ile elde edilmekte olduğu ve bu bakımdan bir miktar hata içereceği kolaylıkla görülebilir.



Şekil 6.1: Euler Yöntemi

Şayet $h = x_0 + h$ artımı yeterince küçük tutulursa hata küçük olacaktır. Bir kez $x = x_0 + h$ noktasında y değeri elde edildikten sonra yeni bir adımda aynı hesap tekrar edilebilir:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + O(h^2) \quad (6.1)$$

Buradaki hata lokal hata olup, çok sayıda adım atıldıktan sonraki hata $O(h)$ mertebesinde olacaktır.

Yöntemin $y_0 = y(x_0)$ başlangıç değeri ile verilmiş bir $y(x) = f(x, y)$ fonksiyonu için programlanması gayet kolaydır. Örneğin, önceki paragrafta da incelenen denklemin

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad y(0) = -1$$

hâlinde $h = 0.1$ için çözümleri aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Tablo 6.2: Euler Yöntemi Çözümleri

x_n	y_n	y'_n	$h \cdot y'_n$	Analitik	Hata
0.0	-1.00000	1.00000	0.10000	-1.00000	0.00000
0.1	-0.90000	0.70000	0.07000	-0.91451	-0.01451
0.2	-0.83000	0.43000	0.04300	-0.85619	-0.02619
0.3	-0.78700	0.18700	0.01870	-0.82245	-0.03545
0.4	-0.76830	-0.03170	-0.00317	-0.81096	-0.04266

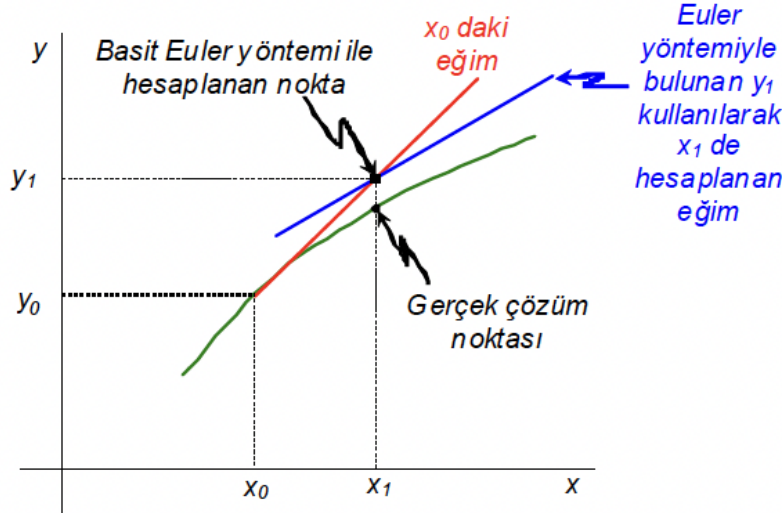
Bu tabloda y_n 'nin her bir satırdaki değeri, bir önceki satırda yer alan y_n değerine önceki satırda hesaplanmış olan $h \cdot y'_n$ değeri eklenerek elde edilmiştir. Görüldüğü gibi $x = 0.4$ noktasındaki fonksiyon değeri 0.04266 hata ile elde edilmiştir. Bunun nedeni adım uzunluğunun çok büyük olmamasıdır. Hata h ile orantılı olduğu göre, bir çözüm elde etmek için adım uzunluğunu 426 kat küçültmek gerekmektedir. Örneğin, uzunluğu yarı azaltılarak elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda görülmektedir.

Tablo 6.3: Küçültülmüş Adım Uzunluğu ile Çözümler

x_n	y_n	y'_n	$h \cdot y'_n$	Analitik	Hata
0.00	-1.00000	1.00000	0.05000	-1.00000	0.00000
0.05	-0.95000	0.85000	0.04250	-0.95369	-0.00369
0.10	-0.90750	0.70750	0.03538	-0.91451	-0.00701
0.15	-0.87213	0.57213	0.02861	-0.88212	-0.01000
0.20	-0.84352	0.44352	0.02218	-0.85619	-0.01267
0.25	-0.82134	0.32134	0.01607	-0.83640	-0.01506
0.30	-0.80528	0.20528	0.01026	-0.82245	-0.017180
0.35	-0.79501	0.09501	0.00475	-0.81406	-0.01905
0.40	-0.79026	-0.00974	-0.00049	-0.81096	-0.02070

4.3.1 Basit Euler Yönteminin İyileştirilmesi

Çoğu basit yöntemin sorunu adım uzunluğunun son derece küçük olması gerektiğinin duyulması ve büyük adım uzunluğunda yeterince doğru sonuç vermemesidir. Şekilde basit Euler yönteminin küçük bir ilave çabayla nasıl bir miktar iyileştirilebileceği görülmektedir.



Şekil 6.2: Basit Euler Yönteminin İyileştirilmesi

Euler yönteminde x_0 başlangıç noktasında hesaplanan birinci dereceden türev aslında gerçek fonksiyonun temsil ettiği eğrinin bu noktada teğetidir. Bu teğet üzerinde x doğrultusunda h kadar ilerlenerek bulunan y_1 noktasında, h adımının büyüklüğüne bağlı olarak eğrinin uzağına düşmektedir. Bu noktayı eğriye yaklaştırmannın en iyi yolu x_0 daki türev yerine ortalama bir türev kullanmaktır.

Euler yönteminde iyileştirme herhangi bir x_n noktasındaki eğim yerine, bununla bir sonraki x_{n+1} noktasında elde edilecek eğrinin ortalamasını kullanarak:

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{y'_n + y'_{n+1}}{2} \quad (4.4)$$

şeklinde yapılabilir. Ancak formülün bu şekilde doğrudan uygulanması mümkün değildir. Zira buradaki y'_{n+1} türevi x_{n+1} noktasındaki türev olup, türevin değeri aynı zamanda y_{n+1} büyüklüğüne bağlı olabilir ki çözümün bu aşamasında henüz y_{n+1} bilinmemektedir. Dolayısıyla çözüm iki aşamada gerçekleştirilecektir.

Birincisi ancak basit Euler yöntemi ile yaklaşık bir y_{n+1} değeri elde edilecek, bu değer x_{n+1} ile birlikte kullanılarak y'_{n+1} türevi hesaplanacak, daha sonra (4.4) formülüyle y_{n+1} yeni değeri hesaplanacaktır.

Aslında bu yöntemin birinci aşamasında elde edilen y_{n+1} değeri hata içerdiğinden bunun kullanılmasıyla elde edilen y'_{n+1} türevi de bir miktar hatalı olacaktır. Dolayısıyla ortalama hata ile yapılmış olan hesabın da hata söz konusu olacaktır. Ancak basit Euler yöntemiyle kıyasla bu hata daha küçük olacaktır.

Ortalama türevle elde edilen y'_{n+1} değerleri kullanılarak yeniden hesaplanması ve bunun da bir önceki aşamada türev ortalaması alınarak gerçekleştirilmesi yapılması, hata

miktarını önemli oranda azaltan etkili bir iyileştirmenin çok daha iyileştirilmiş yöntemlerin herhangi birini tanımadan gerekliliğini göstermektedir.

Örnek olarak önceki paragraflarda ele alınan

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad y(0) = -1$$

problemi için bu iyileştirilmiş yöntem iki aşamalı olarak uygulanmış ve sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 6.4: İyileştirilmiş Euler Yöntemi Sonuçları

x_n	y_n	$h \cdot y'_n$	y_{n+1}	$h \cdot y'_{n+1}$	$h \cdot y'_{ort}$	y_{n+1}	Analitik	Hata
0.0	-1.00000	0.10000	-0.90000	0.07000	0.08500	-0.91500	-1.00000	0.00000
0.1	-0.91500	0.07150	-0.84350	0.04435	0.05793	-0.85708	-0.91451	0.00049
0.2	-0.85708	0.04571	-0.81137	0.02114	0.03342	-0.82365	-0.85619	0.00088
0.3	-0.82365	0.02237	-0.80129	0.00013	0.01125	-0.81241	-0.82245	0.00120
0.4	-0.81241	0.00124	-0.81117	-0.01888	-0.00882	-0.82123	-0.81096	0.00145
0.5	-0.82123	-0.01788	-0.83910	0.08391	0.03302	-0.78821	-0.81959	0.00164

İyileştirilmiş Euler yönteminin hatası, Taylor seri yöntemiyle karşılaştırılarak elde edilebilir.

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{I}{2}y''_nh^2 + \frac{y'''(\xi)}{6}h^3, \quad x_n < \xi < x_n + h$$

Buradaki ikinci türev yerine

$$y''_n = \frac{y'_{n+1} - y'_n}{h}$$

şeklinde ileri fark yaklaşımı alınır,sa,

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{1}{2} \left[\frac{y'_{n+1} - y'_n}{h} + O(h) \right] h^2 + O(h^3)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left[y'_n + \frac{1}{2}y'_{n+1} - \frac{1}{2}y'_n + O(h^3) \right] + O(h^3)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{y'_n + y'_{n+1}}{2} + O(h^3)$$

görüldüğü gibi iyileştirilmiş Euler yönteminin hatası $O(h^3)$ mertebesinde olup, basit yöntem göre bir mertebe daha iyidir. Ancak bu hata lokal hata olup, adım yapılan bir integrasyon sırasında hata birikmesi olacaktır. İntegral aralığında toplam hata $O(h^2)$ mertebesinde olacaktır.

4.3.2 Basit Euler Yöntemi için Farklı Bir İyileştirme Yöntemi

Yukarıda görüldüğü gibi iyileştirme yöntemi Euler yönteminde kullanılan eğimin ortalama bir değerini x_n ve x_{n+1} noktalarındaki eğimler yardımıyla bulmaya esaslanmaktadır.

Bunun yukarıdakinden başka bir yolu da orta-nokta yöntemidir. Bunun için Euler yönteminde $x + \frac{h}{2}$ noktasında eğimi elde hesaplanarak kullanılır. Bu noktada eğimi hesaplanarak kullanılır.

4.4. Runge-Kutta Yöntemleri

Basit Euler yöntemi Taylor serisinde bir terim alınarak çıkartılmıştır. Değiştirilmiş Euler yöntemi de Taylor serisinde iki terimi kullanılarak çeşitli şekilde yazılabilir:

$$y(x+h) = y(x_0) + y'(x_0)h + y''(x_0)\frac{h^2}{2}$$

Sayet ikinci türev geri fark yaklaşımı ile temsil edilirse

$$y(x_0+h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{y'(x_0+h) - y'(x_0)}{h} \frac{h^2}{2}$$

$$y(x_0+h) = y(x_0) + \frac{y'(x_0+h) + y'(x_0)}{2} h$$

şeklinde önceki paragrafta çıkartılan iyileştirilmiş Euler yöntemiyle aynı formülasyon elde edilir.

Alman matematikçiler Runge ve Kutta Taylor serisinde ikiden fazlası ile Euler yönteminin daha da iyileştirilebileceğini göstermişlerdir. İyileştirilmiş Euler yönteminin ikinci dereceden bir Runge-Kutta yöntemi olduğu belirtilmiştir. Bu paragrafta sadece dördüncü ve beşinci dereceden Runge-Kutta yöntemleri incelenecektir.

İkinci dereceden Runge-Kutta yöntemlerinde fonksiyonun bir x_0 noktasındaki $y(x_0)$ değerine k_1 ve k_2 gibi iki büyüklüğün ağırlıklı ortalamaları ilave edilmektedir:

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 \quad (4.8)$$

Buradaki k_1 ve k_2 büyüklüklerini x değişkeni kadar arttıgında ve görülen değişimler olarak düşünebiliriz. Çünkü bunlar x deki değişimi ile eğimin çeşitleriyle yerleştirilen dy/dx türüne çarpımlarını alma işlemleridir.

Runge-Kutta yöntemleri y der ki artırın ilk terimi olarak hep Basit Euler yöntemleri ile elde edilir. Arttırdıkları ikinci terim k_2 ise y değerlerinin, h adımının sırasıyla α ve β çarpanları oranında arttırılmasıyla elde edilen yeni x ve y değerleriyle bulunan eğimle ilgilidir. a, b, α ve β parametrelerinin seçimine bağlı olarak değişik Runge-Kutta şemaları elde edilir.

Taylor serisi:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}f'(x_n, y_n) + \dots \quad (6.2)$$

Burada $f(x, y)$ nin türevi:

$$f' = \frac{df}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx} = f_x + f_y f$$

olup, yukarıda kullanılarak:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + h^2 \left(\frac{1}{2}f_x + \frac{1}{2}f_y f \right)_n + \dots \quad (6.2)$$

Genel Runge-Kutta şeması (4.8):

$$y_{n+1} = y_n + ahf(x_n, y_n) + bhf[x_n + \alpha h, y_n + \beta hf(x_n, y_n)] \quad (6.3)$$

Bu son bağıntıyı (6.3) ile karşılaştırabilmek için son terimi birinci mertebeden Taylor serisine açılır:

$$f[x_n + \alpha h, y_n + \beta hf(x_n, y_n)] \approx (f + f_x \alpha h + f_y \beta h)_n \quad (6.3)$$

ve bu açılım (6.3) de yerleştirilirse:

$$y_{n+1} = y_n + (a + b)hf_n + h^2(f_x \alpha b h + f_y \beta b h f)_n \quad (6.5)$$

Şimdi (6.5) bağıntısı, (6.2) ile karşılaştırılırsa bu iki bağıntının eşdeğer olması için,

$$a + b = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}$$

olması gerektiği görülür. Ancak, bu üç ilişki için belirlenmesi gereken dört parametre vardır. Bir parametreyi keyfi olarak seçerek, çeşitli ikinci dereceden Runge-Kutta formülasyonları elde edilebilir: Örneğin,

$$\begin{aligned} a = 0, \quad b = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2} & \quad (\text{Orta-nokta yöntemi}) \\ a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 1, \beta = 1 & \quad (\text{İyileştirilmiş Euler yöntemi}) \\ a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{2}{3}, \quad \alpha = \frac{3}{4}, \beta = \frac{3}{4} & \quad (\text{bir başka yöntem}) \end{aligned}$$

verir. En çok kullanılan Runge-Kutta yöntemleri dördüncü-dereceden yöntemlerdir. Bu yöntemlerin formülasyonunun elde edilmesi için aşağıdaki gibi işlemler yapılır ve 13 parametrelilik, 11 denklemlilik bir sistem elde edilir. İki parametre keyfi seçilerek diğer parametreler hesaplanır.

Aşağıdaki parametre değerleri örnektir:

En çok kullanılan dördüncü-dereceden Runge-Kutta yönteminin formülasyonu aşağıdaki gibidir:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (6.4)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \quad (6.5)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \quad (6.6)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \quad (6.7)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \quad (6.8)$$

Bu formülasyon, örnek olarak birinci-dereceden

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad y(0) = -1 \quad (6.9)$$

denklemini $h = 0.1$ olmak üzere $[0.0, 0.6]$ aralığında uygulanmış ve sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 6.5: Runge-Kutta Yöntemi Sonuçları

x_n	y_n	k_1	k_2	k_3	k_4	k_{ort}	Analitik	Hata
0.0	-1.00000	0.10000	0.08500	0.08575	0.07143	0.085496	-1.00000	0.00000
0.1	-0.91451	0.07145	0.057886	0.05856	0.04560	0.05832	-0.91451	0.00000
0.2	-0.85619	0.04562	0.03334	0.03395	0.02222	0.03374	-0.85619	0.00000
0.3	-0.82246	0.02225	0.01113	0.01169	0.00108	0.01149	-0.82245	0.00000
0.4	-0.81096	0.00110	-0.00896	-0.00846	-0.01806	-0.00863	-0.81096	0.00000
0.5	-0.81959	-0.01804	-0.02714	-0.02668	-0.03537	-0.02684	-0.81959	0.00000
0.6	-0.84644	-0.03536	-0.04359	-0.04318	-0.05104	-0.04332	-0.84643	0.00000

Görüldüğü gibi sayısal sonuçlar analitik sonuçlarla virgülden sonra beşinci haneye kadar uymakta olup, daha önceki izah edilen yöntemlere kıyasla oldukça tatminkar sonuçlar elde edilmektedir.

Dördüncü-dereceden Runge-Kutta yönteminin lokal hatası $O(h^5)$ ve global hatası $O(h^4)$ da mertebesinde. İkinci-dereceden yöntemlere kıyasla çok daha etkin olması, yüksek dereceden yöntemlerin bir avantajı olabileceğini akla getirmekle birlikte, derece büyüdükçe fonksiyonun hesaplama sayısının da artacağı unutulmamalıdır.

6.2 Runge-Kutta-Fehlberg Yöntemi

Runge-Kutta yöntemleriyle yapılan integrasyonun doğruluğunu tespit etmenin bir yolu bir adımda hesaplanan sonuç ile bu adımı ikiye bölerek iki adımda yapılan yeni bir hesapla elde edilen sonucun karşılaştırılmasıdır. İki sonuç arasındaki fark yeterince küçükse yapılan hesabın doğru ve seçilen adım uzunluğunun uygun olduğunu kabul ederiz. Fark büyüklük adım uzunluğunu tekrar ikiye bölünür ve yeni işlem tekrar edilir. Ancak bu yöntem işlem sayısını hayli artırır.

Farklı bir yaklaşım da farklı dereceden Runge-Kutta yöntemlerinin uygulanmasıdır. Bu tip yaklaşımlar, işlem sayısında tasarruf sağlar. Örneğin, dördüncü- ve beşinci-dereceden birer Runge-Kutta formülasyonu ile hesap yapıp sonuçlar karşılaştırılabilir. Runge-Kutta-Fehlberg yöntemi bu tipte bir yaklaşımdır.

Runge-Kutta-Fehlberg formülasyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{k_1}{4}\right) \\
k_3 &= hf\left(x_n + \frac{3h}{8}, y_n + \frac{3k_1}{32} + \frac{9k_2}{32}\right) \\
k_4 &= hf\left(x_n + \frac{12h}{13}, y_n + \frac{1932k_1}{2197} - \frac{7200k_2}{2197} + \frac{7296k_3}{2197}\right) \\
k_5 &= hf\left(x_n + h, y_n + \frac{439k_1}{216} - 8k_2 + \frac{3680k_3}{513} - \frac{845k_4}{4104}\right) \\
k_6 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n - \frac{8k_1}{27} + 2k_2 - \frac{3544k_3}{2565} + \frac{1859k_4}{4104} - \frac{11k_5}{40}\right)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak:

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{25k_1}{216} + \frac{1408k_3}{2565} + \frac{2197k_4}{4104} - \frac{k_5}{5} \right) \quad Hata : O(h^4)$$

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{16k_1}{135} + \frac{6656k_3}{12825} + \frac{28561k_4}{56430} - \frac{9k_5}{50} - \frac{2k_6}{55} \right) \quad Hata : O(h^5)$$

Hata:

$$E = \frac{k_1}{360} - \frac{128k_3}{4275} - \frac{2197k_4}{75240} + \frac{k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}$$

Runge-Kutta-Fehlberg şeması, h ve $h/2$ adımlarıyla hesap yapmak yerine farklı hata mertebesinde dördüncü- ve beşinci dereceden iki Runge-Kutta formülasyonu ile hesap yapıp sonuçları karşılaştırma esasına dayanmaktadır. Bu yöntemin avantajı her iki hesaplamada da aynı k ların kullanılması suretiyle işlem sayısında tasarruf sağlamaktadır.

6.3 Runge-Kutta-Merson Yöntemi

Runge-Kutta-Merson yöntemi 5 farklı k değerinin hesaplandığı bir başka dördüncü-dereceden Runge-Kutta şemasıdır:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{k_1}{3}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{6}\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{8} + \frac{3k_3}{8}\right)$$

$$k_5 = hf\left(x_n + h, y_n + \frac{k_1}{2} - \frac{3k_3}{2} + 2k_4\right)$$

$$k = \frac{1}{6}\left(k_1 + 4k_4 + k_5\right) + O(h^5)$$

$$y_{n+1} = y_n + k$$

Hata:

$$E = \frac{1}{30}(2k_1 - 9k_3 + 8k_4 - k_5)$$

6.4 Runge-Kutta-Gill Algoritması

Dördüncü mertebeden yöntemler arasında en çok tercih edilen birisi de Runge-Kutta-Gill algoritmasıdır:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_i, y_i) \\
k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right) \\
k_3 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_2\right) \\
k_4 &= hf\left(x_i + h, y_i - \frac{1}{\sqrt{2}}k_2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_3\right) \\
k &= \frac{1}{6} \left[k_1 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_2 + 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_3 + k_4 \right] \\
y_{i+1} &= y_i + k
\end{aligned}$$

6.5 Çok adımlı yöntemler

Euler ve Runge-Kutta yöntemleri, bir adımda integral değerini hesaplamak için sadece en son adımda bulunan değerleri kullandıklarından “tek-adımlı yöntemler” olarak nitelendirilmektedir. Bu özelliklerinden dolayı her bir adımda hesabı farklı bir adım uzunluğu kullanarak yapabilmekte ve ayrıca başlangıç şartlarının bir nokta verilmesi halinde çözümleri başlatabilmektedirler.

Diferansiyel denklemin çözümü bir noktada bağlanıp ilk adımlar atıldıktan sonra çözüm yapılmış olan noktaların fonksiyon ve türevleri hakkında bir bilgi sağlanmış olmaktadır. Bu bilgiler bilgisayar hafızasında saklanarak integrasyonun devamı için kullanılabilir. Bu şekilde önceki noktalarda elde edilen bilgileri sonraki noktalarda integrasyonu yine kullanan yöntemler “çok adımlı yöntemler” olarak adlandırılır.

Çok adımlı yöntemler, daha açık bir ifade ile, y ve y' nin önceki değerlerini kullanarak türevi fonksiyonu bir polinom uydurup, bu polinom sayesinde sonraki adımın integral almasına esasında dayanırlar. Bu tipteki çoğu yöntem polynomial polinom oluşturulmasını kolaylaştırmak açısından çok adım uzunluğu kullanılması tercih edilir. Çözümün genlik noktalarının kesinliğinde ve doğruluğuna ise hatasını belirlemesi gerekmektedir. Yöntemin derinlik global hata terimindeki h 'nin üstüne çıkması derinlerdir.

6.5.1 Üçüncü-dereceden Adams-Bashford yöntemi

Çok adımlı tipik bir yöntem “Adams-Bashford yöntemi”dir. Bu yönteme ait formülasyonunu çıkartmak için birinci dereceden bir diferansiyel denklemi

$$dy = f(x, y)dx \quad (6.10)$$

şeklinde düzenleyelim ve x_n ile x_{n+1} aralığında integralini alalım:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} dy = y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx \quad (6.11)$$

Bu eşitliğin sağ tarafının integralini alabilmek için $f(x, y)$ fonksiyonu x bağımsız değişkeni cinsinden bir polinomla yaklaşımı olarak ifade edilecektir. Polinom, hesaplamasal sonuç noktalardan yararlanarak hesaplanması kuadratik, üç nokta kullanılarak kubik olur.

Ne kadar çok nokta kullanılırsa (yuvarlatma hataları önemli olmadığı müddetçe) çözümün doğruluğu da o kadar artacaktır.

İnterpolasyon polinomları nasıl elde edilebileceği daha önce görülmüştü. İpolinomların Mathematica yazılımı vasıtasıyla da kolaylıkla elde etmek mümkündür.

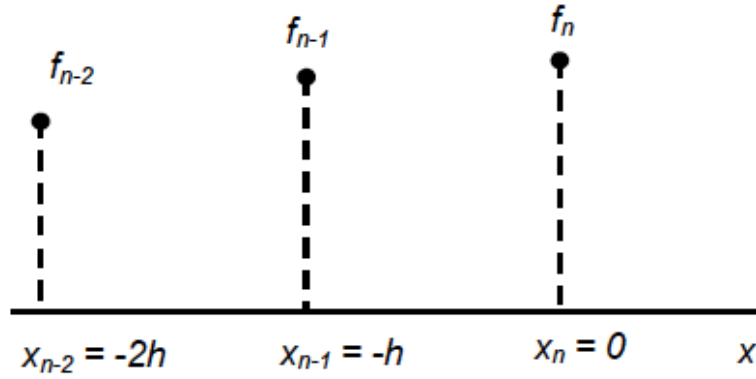
Kuadrik yaklaşım için interpolasyon polinomu x_n noktası başlangıç noktası olmak üzere tanımlanan bir eksen tamında genel olarak:

$$f(x, y) \approx P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (6.12)$$

şeklinde ifade edilirse, x_n noktasının koordinatını bu polinomu sağlayacağı için,

- $a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 = f_n$
- $a_0 + a_1(-h) + a_2(-h)^2 = f_{n-1}$
- $a_0 + a_1(-2h) + a_2(-2h)^2 = f_{n-2}$

oluşumu elde edilecektir.



Şekil 6.3

Birinci denklemeden

$$a_0 = f_n$$

İkinci ve üçüncü denklemlerden

$$-a_1h + a_2h^2 = f_{n+1} - f_n$$

$$-2a_1h + a_2h^2 = f_{n-2} - f_n$$

Katsayılar çözülerek:

$$a_1 = \frac{1}{2h}(f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2})$$

$$a_2 = \frac{1}{2h^2}(3f_n - 4f_{n-1} + f_{n-2})$$

Böylece interpolasyon polinomunu için

$$f(x, y) = \frac{1}{2h^2}(f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2})x^2 + \frac{1}{2h}(3f_n - 4f_{n-1} + f_{n-2})x + f_n$$

ve bu fonksiyon da $x_n = 0$ ile $x_{n+1} = h$ aralığında integre edilerek,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}) + O(h^4) \quad (4.14)$$

elde edilir. Bu formül tek-adımlı formüller arasında birlikte türevin atılan adımlardaki bazı noktalarda hesaplanan değerleri yerine daha önceki adımlarda hesaplanan değerlerinden yararlanılmaktadır.

Örnek

Daha önce olduğu gibi

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad y(0) = -1 \quad (6.13)$$

denklemini ele alarak $x = 0.6$ daki y değerini hesaplayalım.

Bu denklemin $x = 0.2$ ve $x = 0.4$ deki çözümleri tek-adımlı bir yöntemle elde edilerek bu değerler yardımıyla Adams-Bashford yöntemini uygulayabiliriz. Tek-adımlı yöntem olarak Runge-Kutta-Fehlberg yönteminin kullanıldığı hesap aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

Tablo 6.6: Hesap Sonuçları (İlk Adım Uzunluğu $h = 0.2$)

x	y	Analitik	$f(x, y)$	Hata
0.0	-1.000000	-1.000000	1.000000	0.000000
0.2	-0.8561921	-0.8561923	0.4561921	0.0000002
0.4	-0.8109599	-0.8109601	0.0109599	0.0000003
0.6	-0.8450765	-0.8464349		0.0013584

Hataları azaltmak için adım uzunluğunun küçültülebilir. $h = 0.1$ için sonuçlar aşağıdaki tabloda sunulmuştur:

Tablo 6.7: Hesap Sonuçları (İkinci Adım Uzunluğu $h = 0.1$)

x	y	Analitik	$f(x, y)$	Hata
0.0	-1.000000	-1.000000	1.000000	0.000000
0.1	-0.9145123	-0.9145123	0.7145123	0.0000000
0.2	-0.8561923	-0.8561923	0.4561923	0.0000000
0.3	-0.8224547	-0.82245476	0.2224547	0.0000000
0.4	-0.8109601	-0.8109601	0.0109601	0.0000000
0.5	-0.8195920	-0.8195920	-0.1804080	0.0000000
0.6	-0.8463626	-0.8464349	-0.3536374	0.0000723

6.6 Dördüncü-Dereceden Adams-Bashford Yöntemi

Adi diferansiyel denklemin çözümünde geçmiş dört noktadaki değerlerin yararlanılması halinde kübik polinoma eşdeğer bir integral söz konusu olup bu durumda Adams-Bashford yöntemi dördüncü-derecedendir. Bu yöntemin formülasyonu “belirlenmemiş katsayılar yöntemiyle” elde edilebilir. Bunun için

$$f(x) = C_0 f_{n-3} + C_1 f_{n-2} + C_2 f_{n-1} + C_3 f_n \quad (6.14)$$

eşitliğindeki C_i sabitlerinin değerleri araştırılacaktır. Bu amaçla yapılacak işlemleri kolaylaştırmak için eksen takımı $x_n = 0$ olacak şekilde kaydırılırsa, $x_{n+1} - x_n = h$ olmak üzere,

$$\int_0^h f(x) dx = C_0 f(-3h) + C_1 f(-2h) + C_2 f(-h) + C_3 f(0)$$

yazılabilir. Formülasyon, polinom kübik veya daha küçük dereceden aşağı gelebilir olacağından $f(x)$ yerine sırasıyla x^3, x^2, x ve 1 fonksiyonlarını alarak katsayılar araştırılacaktır:

$$f(x) = x^3 \quad \text{için} \quad \int_0^h x^3 dx = \frac{h^4}{4} = C_0(-3h)^3 + C_1(-2h)^3 + C_2(-h)^3 + C_3(0)^3$$

$$f(x) = x^2 \quad \text{için} \quad \int_0^h x^2 dx = \frac{h^3}{3} = C_0(-3h)^2 + C_1(-2h)^2 + C_2(-h)^2 + C_3(0)^2$$

$$f(x) = x \quad \text{için} \quad \int_0^h x dx = \frac{h^2}{2} = C_0(-3h) + C_1(-2h) + C_2(-h) + C_3(0)$$

$$f(x) = 1 \quad \text{için} \quad \int_0^h 1 dx = h = C_0(1) + C_1(1) + C_2(1) + C_3(1)$$

Denklemler matris biçiminde yazılırsa

$$\begin{bmatrix} -27 & -8 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -11 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h^4}{4} \\ \frac{h^3}{3} \\ \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix}$$

ve çözülürse

$$C_0 = -\frac{9}{24}h, \quad C_1 = \frac{37}{24}h, \quad C_2 = -\frac{59}{24}h, \quad C_3 = \frac{55}{24}h$$

elde edilir. Böylece dördüncü dereceden Adams-Bashford yönteminin formülasyonu için

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}] + O(h^5) \quad (6.15)$$

bulunur. Bu yöntemin hatası da kübik interpolasyon polinomu integre edilerek,

$$E = \frac{251}{750} h^7 f^{(5)}(\xi) \quad (6.16)$$

şeklinde elde edilir.

Örnek

Yine daha önceki

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad y(0) = -1 \quad (6.17)$$

problemi ele alınmış olup, $x = 0.2; 0.3; 0.4$; ve $x = 0.5$ noktalarında hesaplanan değerler yukarıdaki formülde kullanılarak $x = 0.6$ noktasında elde edilen fonksiyon değeri aşağıdaki tabloda sunulmuştur. Hatanın ne kadar azaldığını göstermek üzere aynı tabloda üçüncü dereceden Adams-Bashford yöntemi ile elde edilen sonuca da yer verilmiştir.

Tablo 6.8: Sonuçlar

x	Analitik	y	Hata	
0.6	-0.8464349	-0.8463626	-0.0000723	3. Derece
		-0.8464420	0.0000071	4. Derece

4.5.3 Adams-Multon Yöntemi

Adams yönteminin iyileştirilmiş bir şekli Adams-Multon yöntemidir. Bu yöntem Adams-Bashford yöntemini "öngörücü - predictor" olarak kullanırken, ilave olarak bir de "düzeltici - corrector" şeması kullanır. Düzeltici aşaması bir başka kübik polinom kullanılmasına dayanmaktadır.

Öngörücü Aşaması

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}] + \frac{251}{720}h^5y^{(5)}(\xi_1) \quad (6.18)$$

Düzeltici Aşaması

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} - f_{n-2}] - \frac{19}{720}h^5f^{(5)}(\xi_2) \quad (6.19)$$

Bu formüller kullanılarak

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad y(0) = -1 \quad (6.20)$$

problemi için $x = 0.4$ ve $x = 0.5$ de elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda yer almaktadır. Bu noktalardan önceki çözümler Runge-Kutta-Fehlberg yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

Görüldüğü gibi öngörülen değerle düzeltilmiş değer virgülden sonra beşinci haneye kadar uymaktadır.

$$\frac{19}{251 + 19} = \frac{1}{14.2} \quad (6.21)$$

Katı civarında olacaktır.

Tablo 6.9: Hesap Sonuçları

x		y	$f(x, y)$		
0.0		-1.0000000	1.0000000		
0.1		-0.9145123	0.7145123		
0.2		-0.8561923	0.4561923		
0.3		-0.8224547	0.2224547		
	Öngörölmüş	Düzeltilmiş		Analitik	Hata
0.4	-0.8109688	-0.8109592	0.0109688	-0.8109601	0.000009
0.5	-0.8195991	-0.8195903	-0.1804009	-0.8195920	0.000017

Öngörölmüş ve düzeltilmiş değerler arasındaki fark istenen doğruluktan daha küçük ise adım uzunluğunu artırılarak işlem sayısında tasarruf sağlanabilir. Veya aksi durumda adım uzunluğu azaltılır.

Adams-Multon yöntemi, Runge-Kutta-Fehlberg ve Runge-Kutta yöntemlerine kıyasla iki kat daha etkindir.

Bölüm 7

Sonuç

Bu notlarda temel sayısal yöntemler özetlenmiş ve örneklerle açıklanmıştır.