Курс "Введение в математический анализ"

Практическое задание к уроку 2

Тема "Введение в математический анализ"

1. Как относятся друг к другу множество и последовательность? (в ответе использовать слова типа: часть, целое, общее, частное, родитель, дочерний субъект и т.д.)

Множество символизирует объект, сам состоящий из других объектов (элементов), объединенных по одному признаку. Последовательность:
– это множество, элементы которого пронумерованы натуральными числами.
— бесконечная выборка на упорядоченном
множестве натуральных
чисел.
Последовательность элементов множества X может быть

рассмотрена как упорядоченное множество X, изоморфное множеству натуральных чисел.
Таким образом, последовательность является дочерним субъектом множества.

2. Прочитать высказывания математической логики, построить их отрицания и установить истинность.

$\boxed{1.}$ Дано: $\forall y \in [0;1]: \ sgn(y) = 1$ ЛОЖЬ Решение:

$$sgn(y) = \begin{cases} -1 & \text{если } y<0 \\ 0 & \text{если } y=0 \\ 1 & \text{если } y>0. \end{cases}$$

"Для всех y, принадлежащих закрытому интервалу от 0 до 1, функция сигнум от y равна 1."

Отрицание $\exists y \in [0;1]$ sgn
(y) $\neq 1$

$\boxed{2.}$ Дано: $\forall n \in N > 2 : \exists x, y, z \in N :$
$x^n = y^n + z^n$ ложь

Решение:

"Для любого натурального числа больше 2
существуют натуральные числа x, y, z, такие что верно равенство x в степени n сумме y в степени n и z в степени n".

Отрицание: $\exists n \in N > 2 : \forall x, y, z \in N : x^n \neq y^n + z^n$

Если N является не расширенным множеством натуральных чисел, то исходное высказывание является ложным.

$\boxed{3.}$ Дано: $\forall x \in R\ \exists X \in R : X > x$

ИСТИНА Решение:

"Для любого вещественного числа x существует вещественное число X больше, чем x."

Отрицание: $\exists x \in R\ \forall X \in R : X \leq x$

$\boxed{4.}$ Дано: $\forall x \in C\ \exists y \notin C : x > y \,||\, x < y$ ИСТИНА

Решение:

"Для любого комплексного числа x не существует комплесного числа y, такого что y больше или меньше x."

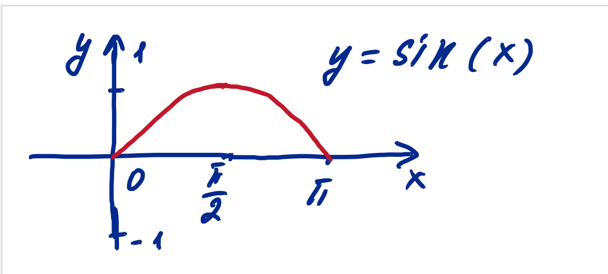
Отрицание: $\exists x \in C, \exists y \in C : x \leq y,\ x \geq y$

$\boxed{5.}$ Дано: $\forall y \in [0; \frac{\pi}{2}] \exists \varepsilon > 0 : \sin y < \sin(y+\varepsilon)$ ЛОЖЬ

Решение:

"Для любого y, принадлежащего закрытому интервалу от 0 до $\frac{\pi}{2}$ существует положительное ε, такое что $\sin y < \sin(y+\varepsilon)$"

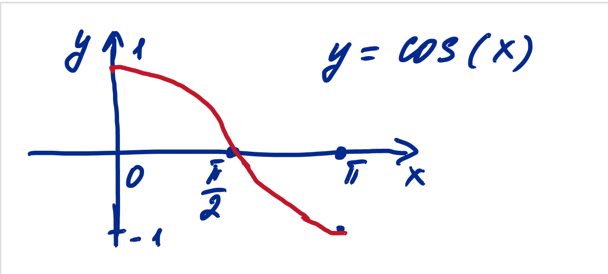
Отрицание: $\exists y \in [0; \frac{\pi}{2}] \forall \varepsilon > 0 : \sin y \geq \sin(y+\varepsilon)$



$\boxed{6.}$ Дано: $\forall y \in [0; \pi) \exists \varepsilon > 0 : \cos y > \cos(y+\varepsilon)$ ИСТИНА Решение:

" Для любого y, принадлежащего

интервалу от нуля включительно до π существует положительное ε, такое что $\cos y > \cos(y+\varepsilon)$".



Отрицание: $\exists y \in [0;\pi)\ \forall \varepsilon > 0 : \cos y \le \cos(y+\varepsilon)$

$\boxed{7.}$ Дано: $\exists x : x \notin \{N, Z, Q, R, C\}$

ИСТИНА

Решение:

"Существует x, не являющееся натуральным, целым, рациональным, вещественным и комплексным числом".

Отрицание: $\forall x: x \in \{N,$
$Z, Q, R, C\}$

Тема “Множество»

1. Даны три множества a, b и c. Необходимо выполнить все изученные виды бинарных операций над всеми комбинациями множеств.

Пересечение

$a \cap b = \{x \mid x \in a \,\&\, x \in b\}$

$a \cap c = \{x \mid x \in a \,\&\, x \in c\}$

$b \cap c = \{x \mid x \in b \,\&\, x \in c\}$

$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c = \{x \mid x$
$\in a \,\&\, x \in b \,\&\, x \in c\}$

пересечение ассоциативно

Объединение

$a \cup b = \{x \mid x \in a \,//\, x \in b\}$

$a \cup c = \{x \mid x \in a \,//\, x \in c\}$

$b \cup c = \{x \mid x \in b \,//\, x \in c\}$

$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c = \{x \mid x$

$\in a \,||\, x \in b \,||\, x \in c\}$

объединение ассоциативно

Пересечение дистрибутивно относительно объединения множеств:

$(a \cup b) \cap c = (a \cap c) \cup (b \cap c) = \{x \,|\, (x \in a \,||\, x \in b) \,\&\, x \in c\}$ Объединение дистрибутивно относительно пересечения множеств:

$(a \cap b) \cup c = (a \cup c) \cap (b \cup c) = \{x \,|\, (x \in a \,\&\, x \in b) \,||\, x \in c\}$

Разность

$a \setminus b = a \cap \bar{b} = \{x \,|\, x \in a \,\&\, x \notin b\}$

$a \setminus c = a \cap \bar{c} = \{x \,|\, x \in a \,\&\, x \notin c\}$

$b \setminus c = b \cap \bar{c} = \{x \,|\, x \in b \,\&\, x \notin c$

$b \setminus a = b \cap \bar{a} = \{x \,|\, x \in b \,\&\, x \notin a\}$

$c \setminus a = c \cap \bar{a} = \{x \,|\, x \in c \,\&\, x \notin a\}$

$c \setminus b = c \cap \bar{b} = \{x \,|\, x \in c \,\&\, x \notin b\}$

$a \setminus b \setminus c = (a \cap \bar{b}) \cap \bar{c} = \{x \mid (x \in a \ \& \ x \notin b) \ \& \ x \notin c\}$

$a \setminus c \setminus b = (a \cap \bar{c}) \cap \bar{b} = \{x \mid (x \in a \ \& \ x \notin c) \ \& \ x \notin b\}$

$b \setminus a \setminus c \quad (b \cap \bar{a}) \cap \bar{c} = \{x \mid x \in b \ \& \ x \notin a) \ \& \ x = \notin c\}$

$b \setminus c \setminus a = (b \cap \bar{c}) \cap \bar{a} = \{x \mid x \in b \ \& \ x \notin c) \ \& \ x \notin a\}$

$c \setminus a \setminus b = (c \cap \bar{a}) \cap \bar{b} \quad \{x \mid x \in c \ \& \ x \notin a) \ \& \ x \notin b\}$ $c \setminus b \setminus a = (c \cap \bar{b}) \cap \bar{a} = \{x \mid x \in c \ \& \ x \notin b) \ \& \ x \notin a\}$

разность не ассоциативна

Симметрическая разность

$a \Delta b = \{x \mid x \in a \oplus x \in b\}$

$a \Delta c = \{x \mid x \in a \oplus x \in c\}$

$b \Delta c = \{x \mid x \in b \oplus x \in c\}$

$a \Delta b \Delta c = \{x \mid (x \in a \oplus x \in b) \oplus x \in c\}$

симметрическая разность

ассоциативна

Декартово произведение
$a \times b = \{ (x;y) \mid x \in a, y \in b \}$
$a \times c = \{ (x;y) \mid x \in a, y \in c \}$
$b \times c = \{ (x;y) \mid x \in b, y \in c \}$

Если $A \neq B$, то $A \times B \neq B \times A$. То есть декартово произведение не обладает свойством коммутативности. $b \times a = \{ (x;y) \mid x \in b, y \in a \}$
$c \times a = \{ (x;y) \mid x \in c, y \in a \}$
$c \times b = \{ (x;y) \mid x \in c, y \in b \}$
$a \times (b \times c) = \{ (x;y;z) \mid x \in a, y \in b, z \in c \}$

$a \times (b \cap c) = (a \times b) \cap (a \times c)$
$a \times (b \cup c) = (a \times b) \cup (a \times c)$
$a \times (b \setminus c) = (a \times b) \setminus (a \times c)$

Тема “Последовательность»

1. Даны четыре последовательности. Необходимо:

a. исследовать их на монотонность;

b. исследовать на ограниченность;

c. найти пятый по счету член.

Дано: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^n - n$

Рассмотрим разность n-го члена последовательности и её (n+1)-го члена

$(2^n - n) - (2^{n+1} - n + 1) =$

$2^n - 2^{n+1} - n + n - 1 =$

$= 2^n - 2^{n+1} - 1 < 0, \forall n \in N$

≥ 1

$\Rightarrow$ последовательность возрастает

Дано: $\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-n}$

При возрастании n от 2 и до бесконечности

знаменатель уменьшается

$\frac{1}{1-2} = -1 \qquad \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ последовательность возрастает

Дано: $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^n + \sqrt{2n}$

Так как -1^n при любом n
равно -1,
то рост последовательности
обусловлен слагаемым
$\sqrt{2n}$

$\Rightarrow$ последовательность возрастает

Дано: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2}$

Так как $(-1)^{2n}$ при любом n
равно 1,
то рост последовательности
обусловлен слагаемым $\frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow$ последовательность убывает.

b. <u>Исследование на</u>

Ограниченность:

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^n - n$

Рассмотрим разность $(n+1)$-го члена последовательности и её n-го члена:

$2^{n+1} - (n+1) - 2^n + n =$

$2^{n+1} - 2^n - 1$

приращение члена к члену возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ последовательность неограничена

$\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-n}$

$\frac{1}{1-(n+1)} - \frac{1}{1-n} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{1-n} = -\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{1-n}\right)$

$=$

$= -\frac{1-n+n}{n\cdot(1-n)} = \frac{-1}{(n)\cdot(1-n)}$

$\frac{-1}{2\cdot(-1)} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{-1}{3\cdot(-2)} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{4\cdot(-3)} = \frac{1}{12}$

приращение от члена к члену убывает $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ последовательность ограничена

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^n + \sqrt{2n}$$

$$-1^{(n+1)} + \sqrt{2(n+1)} - (-1^n + \sqrt{2n}) = \sqrt{2(n+1)} - \sqrt{2n}$$

приращение от члена к члену возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ последовательность неограничена

$$\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^n + \frac{1}{n^2}$$

$$(-1)^{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - (-1)^{2n} - \frac{1}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

приращение от члена к члену убывает $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ последовательность ограничена

c. Найти пятый по счету член

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^n - n$

$a_5 = 2^5 - 5 = 32 - 5 = 27$

$\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-n}$ $\quad b_5 = \frac{1}{1-6} = -0{,}2$

$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^n + \sqrt{2n}$

$c_5 = -1^5 + \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10} - 1$

$\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2}$

$d_5 = (-1)^{2 \cdot 5} + \frac{1}{5^2} = 1 + \frac{1}{25} = 1.04$

2. Найти 12-й член заданной неявно последовательности

$$a_1 = 128, \quad a_{n+1} - a_n = 6$$

Решение:

$$a_{n+1} = a_n + 6$$

$$a_2 = a_1 + 6 = 128 + 6$$

$$a_3 = a_2 + 6 = 128 + 6 + 6 = 128 + 6 \cdot 2$$

$$a_4 = a_3 + 6 = 128 + 6 + 6 + 6 = 128 + 6 \cdot 3$$

$$a_{12} = 128 + 6 \cdot 11 = 194$$