Курс "Введение в математический анализ"

Практическое задание к уроку 6

Тема "Понятие о производной"

1. Найти производную выражения:

a. $(\sin x \cdot \cos x)' = (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)' =$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

b. $(\ln(2x+1)^3)' = 3 \cdot \ln(2x+1)^2 \cdot (\ln(2x+1))' =$

$= 3 \cdot \ln(2x+1)^2 \cdot \frac{1}{2x+1} \cdot (2x+1)' =$

$= \frac{3 \cdot \ln(2x+1)^2}{2x+1} \cdot 2 = \frac{6 \cdot \ln(2x+1)^2}{2x+1}$

c. $\left(\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}\right)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}} \cdot \left(\sin^2(\ln(x^3))\right)' =$

$= 3\cdot \frac{\sin(\ln(x^3))}{\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}} \cdot \frac{\cos(\ln(x^3))}{x}$

$u = \sin^2(\ln(x^3))$

$(\sqrt{u})' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{u}}$

$\left(\sin^2(\ln(x^3))\right)' = 2\cdot\sin(\ln(x^3))^{2-1}\cdot\left(\sin(\ln(x^3))\right)' =$

$= 2\cdot\sin(\ln(x^3))\cdot 3\cdot\frac{\cos(\ln(x^3))}{x}$

$t = \ln(x^3)$ $\quad \sin^2 t = 2\sin t\cdot t'$

$\left(\sin(\ln(x^3))\right)' = \cos(\ln(x^3))\cdot\left(\ln(x^3)\right)' = \frac{3\cdot\cos(\ln(x^3))}{x}$

$\left(\ln(x^3)\right)' = \frac{1}{x^3}\cdot(x^3)' = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$

$$d.\ \left(\frac{x^4}{\ln(x)}\right)' = \frac{(x^4)'\cdot\ln(x) - (\ln(x))'\cdot x^4}{(\ln(x))^2} =$$

$$= \frac{4\cdot x^3\cdot\ln(x) - \frac{1}{x}\cdot x^4}{(\ln(x))^2} = 4\cdot\frac{x^3}{\ln(x)} - \frac{x^3}{(\ln(x))^2}$$

2. Найти выражение производной функции и ее значение в точке

$f(x) = \cos(x^2+3x)$, $\quad x_0 = \sqrt{\pi}$

$$(\cos(x^2+3x))' = -\sin(x^2+3x)\cdot(x^2+3x)' =$$

$$= -(2x+3)\cdot\sin(x^2+3x)$$

$$f'(x_0) = -(2\cdot\sqrt{\pi}+3)\cdot\sin(\sqrt{\pi}^2+3\pi) =$$

$$= -(2\cdot\sqrt{\pi}+3)\cdot\sin(4\pi) = -(2\cdot\sqrt{\pi}+3)\cdot 0 = 0$$

3. Найти значение производной функции в точке:

$$f(x)=\frac{x^3-x^2-x-1}{1+2x+3x^2-4x^3}, \quad x_0=0$$

$$f'(x)=\left(\frac{x^3-x^2-x-1}{1+2x+3x^2-4x^3}\right)'=$$

$$=\frac{(x^3-x^2-x-1)'\cdot(1+2x+3x^2-4x^3)-(x^3-x^2-x-1)\cdot(1+2x+3x^2-4x^3)'}{(1+2x+3x^2-4x^3)^2}=$$

$$=\frac{(3x^2-2x-1)\cdot(1+2x+3x^2-4x^3)-(x^3-x^2-x-1)\cdot(2+6x-12x^2)}{(1+2x+3x^2-4x^3)^2}=$$

$$=\frac{3x^2-2x-1}{1+2x+3x^2-4x^3}+\frac{(x^2-x^2-x-1)\cdot(12x^2-6x-2)}{(1+2x+3x^2-4x^3)^2}$$

$$f'(x_0)=\frac{-1}{1}+\frac{(-1)\cdot(-2)}{1^2}=-1+2=1$$

4. Найти угол наклона касательной к графику функции в точке:

$f(x) = \sqrt{3x} \cdot \ln x, \quad x_0 = 1$

Область определения $x > 0$

$$f'(x) = \sqrt{3} \cdot (\sqrt{x} \cdot \ln(x))' = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(x) + \sqrt{x} \cdot (\ln(x))'\right) =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(x) + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = \sqrt{3} \cdot \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$$

Производная равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в данной точке.

$$f'(x_0) = \sqrt{3} \cdot \frac{\ln(1)}{2 \cdot \sqrt{1}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}} = 0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \qquad \alpha = \operatorname{arctg}(\sqrt{3})$

Ответ: в радианах 1,047197551804 4

в градусах 60,00000034823