Курс "Введение в математический анализ"

Практическое задание к уроку 11

Тема "Функция нескольких переменных"

1. Исследовать функцию на условный экстремум

$U = 3 - 8x + 6y$, если $x^2 + y^2 = 36$

$L(\lambda, x, y) = 3 - 8x + 6y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 36)$

$$\begin{cases} L'_x = -8 + \lambda \cdot 2x = 0 \\ L'_y = 6 + \lambda \cdot 2y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda} \\ y = -\frac{3}{\lambda} \\ \frac{16}{\lambda^2} + \frac{9}{\lambda^2} = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda} \\ y = -\frac{3}{\lambda} \\ \lambda^2 = \frac{25}{36} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{5}{6}; -\frac{24}{5}; \frac{18}{5}\right) \quad \left(\frac{5}{6}; \frac{24}{5}; -\frac{18}{5}\right)$$

Исследуем на условный экстремум

$L''_{xx} = 2\lambda \qquad L''_{yy} = 2\lambda \qquad L''_{\lambda\lambda} = 0$

$L''_{xy} = 0 \qquad L''_{x\lambda} = 2x \qquad L''_{y\lambda} = 2y$

$$\begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} - 2x \cdot \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2\lambda \end{vmatrix} + 2y \cdot \begin{vmatrix} 2x & 2\lambda \\ 2y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 2x \cdot (2x \cdot 2\lambda - 0) + 2y \cdot (0 - 2\lambda \cdot 2y) =$$

$$= -8x^2\lambda - 8y^2\lambda = \underbrace{-8\lambda \cdot (x^2 + y^2)}_{\text{знак зависит от знака } \lambda}$$

$\left(-\frac{5}{6}; -\frac{24}{5}; \frac{18}{5}\right)$

$\lambda = -\frac{5}{6} \Rightarrow \Delta_1 > 0 \Rightarrow$ минимум

$\left(\frac{5}{6}; \frac{24}{5}; -\frac{18}{5}\right)$

$\lambda = \frac{5}{6} \Rightarrow \Delta_2 < 0 \Rightarrow$ максимум

2. Иcследовать функцию на условный экстремум

$u = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15$, если $x^2 + 16y^2 = 64$

$L(\lambda, x, y) = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15 + \lambda\cdot(x^2 + 16y^2 - 64)$

$$\begin{cases} L'_x = 4x + 12y + \lambda\cdot 2x = 0 \\ L'_y = 12x + 64y + \lambda\cdot 32y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{2x+6y}{x} \\ \lambda = -\dfrac{3x+16y}{8y} \\ x^2 + 16y^2 = 64 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = -\dfrac{2x+6y}{x} \\ 16xy + 48y^2 = 3x^2 + 16xy \\ x^2 + 16y^2 = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{2x+6y}{x} \\ 16y^2 = x^2 \\ x^2 + x^2 = 64 \end{cases}$$

$\left(-\frac{7}{2}; 4\sqrt{2}; \sqrt{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; 4\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; -4\sqrt{2}; \sqrt{2}\right), \left(-\frac{7}{2}; -4\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$

$2x^2 = 64$ $\quad$ $16y^2 = 32$ $\quad$ $\lambda_1 = -\dfrac{2\cdot 4\sqrt{2} + 6\cdot\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = -\dfrac{7}{2} = \lambda_3$

$x^2 = 32$ $\quad$ $y^2 = 2$ $\quad$ $\lambda_2 = -\dfrac{2\cdot 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} = \lambda_4$

$x_1 = 4\sqrt{2}$ $\quad$ $y_1 = \sqrt{2}$

$x_2 = -4\sqrt{2}$ $\quad$ $y_2 = -\sqrt{2}$

$$L'_x = 4x + 12y + \lambda \cdot 2x$$
$$L'_y = 12x + 64y + \lambda \cdot 32y$$
$$L'_\lambda = x^2 + 16y^2 - 64$$

$$L''_{xx} = 4 + 2\lambda \qquad L''_{yy} = 64 + 32\lambda \qquad L''_{\lambda\lambda} = 0$$

$$L''_{xy} = 12 \qquad L''_{x\lambda} = 2x \qquad L''_{y\lambda} = 32y$$

$$\begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 4+2\lambda & 12 \\ 32y & 12 & 64+32\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 4+2\lambda & 12 \\ 32y & 12 & 64+32\lambda \end{vmatrix} = -2x \cdot \begin{vmatrix} 2x & 12 \\ 32y & 64+32\lambda \end{vmatrix} + 32y \cdot \begin{vmatrix} 2x & 4+2\lambda \\ 32y & 12 \end{vmatrix} =$$
$$= -2x \cdot (128 + 64x\lambda - 384y) + 32y \cdot (24x - 128y - 64y\lambda) =$$
$$= -256x^2 - 128x^2\lambda + 768xy + 768xy - 4096y^2 - 2048y^2\lambda =$$
$$= -256(x^2 + 16y^2) - 128\lambda(x^2 + 16y^2) + 1536xy =$$
$$= -256 \cdot 64 - 128\lambda \cdot 64 + 1536xy = -16384 - 8192\lambda + 1536xy$$

$\left(-\frac{7}{2}; 4\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; 4\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -4\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{7}{2}; -4\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$

максимум минимум минимум максимум.

3. Найти производную функции $U = x^2 + y^2 + z^2$ по направлению вектора $\vec{c}(-9, 8, -12)$ в точку $M(8; -12; 9)$.

1. Найдем частные производные в точке $M(8;-12;9)$

$U'_x = 2x \qquad U'_x\big|_{(8;-12;9)} = 2 \cdot 8 = 16$

$U'_y = 2y \qquad U'_y\big|_{(8;-12;9)} = 2 \cdot (-12) = -24$

$U'_z = 2z \qquad U'_z\big|_{(8;-12;9)} = 2 \cdot 9 = 18$

2. Найдем координаты направляющего вектора единичной длины

$$\frac{\partial u}{\partial c} = u'_x(x_0;y_0;z_0)\cdot\cos\alpha + u'_y(x_0;y_0;z_0)\cdot\cos\beta + u'_z(x_0;y_0;z_0)\cdot\cos\gamma$$

$$|\bar{c}| = \sqrt{9^2 + 8^2 + 12^2} = 17$$

$$\bar{c}_0 = \left(-\frac{9}{17}; \frac{8}{17}; -\frac{12}{17}\right)$$

$\cos\alpha = -\frac{9}{17}$, $\cos\beta = \frac{8}{17}$, $\cos\gamma = -\frac{12}{17}$

$$u'\big|_{(8;-12;9)} = 16 \cdot \left(-\frac{9}{17}\right) - 24 \cdot \frac{8}{17} + 18 \cdot \left(-\frac{12}{17}\right) \approx 32{,}471$$

4. Найти производную функции $U=e^{x^2+y^2+z^2}$ по направлению вектора $\vec{d}=(4;-13;-16)$ в точку $L(-16;4;-13)$.

1. Найдем частные производные в точке $L(-16;4;-13)$

$U'_x = 2x\cdot e^{x^2+y^2+z^2}$

$U'_y = 2y\cdot e^{x^2+y^2+z^2}$ $\qquad e^{16^2+4^2+13^2} = 441$

$U'_z = 2z\cdot e^{x^2+y^2+z^2}$

$U'_x\big|_{(-16;4;-13)} = 2\cdot(-16)\cdot e^{441} = -32\cdot e^{441}$

$U'_y\big|_{(-16;4;-13)} = 2\cdot 4\cdot e^{441} = 8\cdot e^{441}$

$U'_z\big|_{(-16;4;-13)} = 2\cdot(-13)\cdot e^{441} = 26\cdot e^{441}$

2. Найдем координаты направляющего вектора единичной длины

$$\frac{\partial u}{\partial d} = U'_x(x_0;y_0;z_0)\cdot\cos\alpha + U'_y(x_0;y_0;z_0)\cdot\cos\beta + U'_z(x_0;y_0;z_0)\cdot\cos\gamma$$

$|\vec{d}| = \sqrt{4^2+13^2+16^2} = 21$

$\bar{d}_0 = \left(\frac{4}{21}; -\frac{13}{21}; -\frac{16}{21}\right)$ $\quad \cos\alpha = \frac{4}{21}, \cos\beta = -\frac{13}{21}, \cos\gamma = -\frac{16}{21}$

$$u'\big|_{(-16;4-13)} = -32\cdot e^{441}\cdot\frac{4}{21} + 8\cdot e^{441}\cdot\left(-\frac{13}{21}\right) + 26\cdot e^{441}\cdot\left(-\frac{16}{21}\right) =$$

$$= -e^{441}\cdot\left(\frac{32\cdot 4}{21} + \frac{8\cdot 13}{21} + \frac{26\cdot 16}{21}\right) \simeq -e^{441}\cdot 30{,}857 \simeq$$

$$\simeq 1{,}031\cdot 10^{193}$$