Курс "Введение в математический анализ"

Практическое задание к уроку 8

Тема "Производные функций нескольких переменных"

1. Найти область определения функции

$$z=\sqrt{1-x^3}+\ln(y^2-1)$$

$1-x^3>0 \qquad x^3<1$

$y^2-1>0 \qquad y^2>1$

$$\{x,y\in R: (y>1,\ x\leq 1)\cap(y<-1,\ x\leq 1)\}$$

2. Найти производные 1-го порядка функции

$$z=\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^3$$

$$z'_x=3\cdot\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2\cdot\frac{1}{\ln y}\cdot\frac{1}{x}=\frac{3\cdot\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2}{x\cdot\ln y}$$

$$z'_y=3\cdot\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2\cdot\frac{\ln x}{\ln^2 y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{3\cdot\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2\cdot\ln x}{y\cdot\ln^2 y}$$

3. Найти полный дифференциал функции в точке (1;1)

$$z = \sqrt{2xy + \cos\frac{x}{y}}$$

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}} \cdot \left(2y - \frac{\sin\frac{x}{y}}{y}\right) \cdot dx +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}} \cdot \left(2x + \frac{x\cdot\sin\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2}\right) \cdot dy$$

$$= \frac{y - \frac{\sin\frac{x}{y}}{2y}}{\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}} \cdot dx + \frac{x + \frac{x\cdot\sin\frac{x}{y}}{2y^2}}{\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}} \cdot dy$$

$$dz(1;1) = \frac{1 - \frac{\sin(1)}{2}}{\sqrt{2+\cos(1)}} \cdot dx + \frac{1 + \frac{\sin(1)}{2}}{\sqrt{2+\cos(1)}} \cdot dy =$$

4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$$

$$\begin{cases} z'_x = 2\cdot x + y - 6 = 0 \\ z'_y = x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot(9-2y) + y - 6 = 0 \\ x = 9 - 2y \end{cases}$$

$18 - 4y + y - 6 = 0$

$-3y = 6 - 18$

$3y = 12$

$y = 4$

$x = 9 - 2\cdot 4 = 1$

одна критическая точка

$M_1(1;4)$

$z''_{xx} = 2 \qquad z''_{xy} = 1 \qquad z''_{yy} = 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 1\cdot 1 = 4 - 1 = 3 > 0 \text{ и } z''_{xx} > 0$$

$\Rightarrow$ В точке $M_1(1;4)$ имеется минимум

$$z(1;4) = 1 + 1\cdot 4 + 4^2 - 6\cdot 1 - 9\cdot 4 = -21$$