Курс "Введение в математический анализ"

Практическое задание к уроку 10

Тема "Ряды"

1 Исследовать ряд на сходимость, используя признак д'Аламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

Признак д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Если $q<1$ - сходится, $q>1$ - расходится, при $q=1$ неопределенность

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} : \frac{n^n}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot(n!)^2}{n^n\cdot((n+1)!)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+1)^n\cdot(n!)^2}{n^n\cdot(n+1)^2\cdot(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n\cdot(n+1)} = 0$$

Так как $q<1$, то ряд сходится

2. Исследовать ряд на сходимость, используя радикальный признак Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

Так как $\frac{1}{2} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ сходится

3. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n}$$

1) проверка ряда на знакочередование

$$\sum_{n=1}^{\infty} = (-1)^n \cdot \frac{1}{n+\ln n} = -1 + \frac{1}{2+\ln 2} - \frac{1}{3+\ln 3} + \frac{1}{4+\ln 4} + \ldots$$

$\Rightarrow$ Ряд является знакочередующимся

2) проверка убывания членов ряда по модулю

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+\ln n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\ln n} = 0$$

$$|a_n| > |a_{n+1}|$$

$n+1+\ln(n+1) > n+\ln n$ для любого n

Вывод: ряд сходится

Исследуем, как именно сходится ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\ln n}$$

Используем признак д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1+\ln(n+1)}}{\frac{1}{n+\ln n}} = \frac{n+\ln n}{n+1+\ln(n+1)} \approx \frac{n}{n+1} = q > 1$$

Так как $q>1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\ln n}$ расходится

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n}$ сходится условно

4. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Раабе

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\frac{\frac{3^n}{2^n}}{\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\frac{3^n\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot 3^{n+1}}-1\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\frac{3^n\cdot 2^n\cdot 2}{2^n\cdot 3^n\cdot 3}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\cdot n\right)=\infty$$

Так как $D=\infty$, то ряд сходится

5. Разложить функцию по Тейлору в единице:

$f(x) = \ln(16 \cdot x^2)$

$f(1) = \ln(16)$

$f'(x) = \frac{2}{x}$, $f'(1) = 2$

$f''(x) = -\frac{2}{x^2}$, $f''(1) = -2$

$f'''(x) = \frac{4}{x^3}$, $f'''(1) = 4$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$\ln(16 \cdot x^2) = \ln(16) + \frac{2}{1!}(x-1) - \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{4}{3!}(x-1)^3 + \ldots$$

6.* Дана функция $f(x)=x^2$

a. Разложить функцию в ряд Фурье по косинусам на отрезке $x\in[-\pi;\pi]$

b. Построить график функции и ее разложения

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx+b_n\sin nx)$$

$f(x)$ - четная функция $\Rightarrow b_n=0$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underline{f(x)\cos nx\,dx}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cdot\cos nx\,dx=\left|\begin{array}{l}u=x^2\quad du=2x\,dx\\ dv=\cos nx\,dx\\ v=\frac{1}{n}\sin nx\end{array}\right|$$

произведение двух четных функций $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ четная функция

$$=\frac{2}{\pi}\cdot x^2\cdot\frac{1}{n}\cdot\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\,dx=$$

$\sin\pi n=1\ \forall n\in\mathbb{Z}$

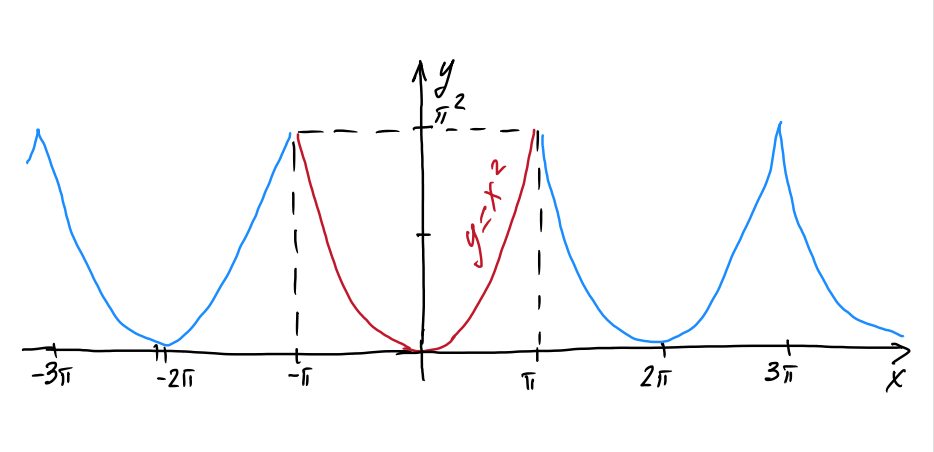
$$=\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}x\cdot(-\sin nx)dx=\left|\begin{array}{l}u=x\quad du=1\cdot dx\\ dv=-\sin nx\cdot dx\\ v=\frac{1}{n}\cos nx\end{array}\right|=$$

$$=\frac{4}{\pi n}\cdot x\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cdot\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{4\pi}{\pi\cdot n^2}\cdot\cos n\pi-\frac{4}{\pi n^2}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{n^2}\cdot(-1)^n$$

$\cos\pi n=(-1)^n$

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\cos nx}{n^2}=x^2\qquad x\in[-\pi;\pi]$$



Тема «Понятие об интеграле»

1. Найти неопределенный интеграл

$$\int (2x^2 - 2x - 1 + \sin x - \cos x + \ln x + e^x)\,dx =$$

$$= \int 2x^2 dx - \int 2x\,dx - \int dx + \int \sin x\,dx - \int \cos x\,dx + \int \ln x\,dx + \int e^x dx =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - x^2 - x - \cos x - \sin x + \ln x \cdot x - x + e^x + C =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2x - \cos x - \sin x + x \cdot \ln x + e^x + C$$

2. Найти неопределенный интеграл

$$\int (2x + 6xz^2 - 5x^2y - 3\ln z)\,dx =$$

$$= \int 2x\,dx + \int 6xz^2\,dx - \int 5x^2y\,dx - \int 3\ln z\,dx =$$

$$= 2\int x\,dx + z^2\int 6x\,dx - y\int 5x^2\,dx - \ln z\int 3\,dx =$$

$$= 2\cdot\frac{x^2}{2} + 6\cdot z^2\cdot\frac{x^2}{2} - 5y\cdot\frac{x^3}{3} - 3x\cdot\ln z + C =$$

$$= x^2 + 3x^2\cdot z^2 - \frac{5x^3y}{3} - 3x\ln z + C =$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^{\pi} 3x^2\cdot\sin(2x)\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x^2 \quad du = 2x\,dx \\ dv = 3\cdot\sin(2x) \\ V = -3\,\frac{\cos(2x)}{2} \end{array}\right.$$

Интегрирование по частям: $\int U\,dV = U\cdot V - \int V\,dU$

$$V = \int 3\cdot\sin(2x) = \left|\begin{array}{l} u = 2x \\ du = 2dx \end{array}\right| = 3\int\frac{\sin(u)}{2}\,du = \frac{3}{2}\int\sin(u)\,du =$$

$$= -\frac{3}{2}\cos(u) = -3\frac{\cos(2x)}{2}$$

$$\int 3x^2\cdot\sin(2x)\,dx = -3x^2\,\frac{\cos(2x)}{2} - \int(-3x\cdot\cos(2x))\,dx =$$

$$= -3\cdot x^2 \cdot \frac{\cos(2x)}{2} + \int 3x\cdot\cos(2x)\,dx$$

$$\int 3x\cdot\cos(2x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = 3\cos(2x)dx & \\ v = 3\,\frac{\sin(2x)}{2} & \end{array} \right| =$$

$$= 3\cdot x\,\frac{\sin(2x)}{2} - \int 3\,\frac{\sin(2x)}{2}\,dx$$

$$\int 3\,\frac{\sin(2x)}{2}\,dx = -3\,\frac{\cos(2x)}{4}$$

$$\Rightarrow \int 3x^2\cdot\sin(2x)\,dx = -3x^2\,\frac{\cos(2x)}{2} + 3x\,\frac{\sin(2x)}{2} + 3\,\frac{\cos(2x)}{4} + C$$

$$\int_0^{\pi} 3x^2\cdot\sin(2x)\,dx = \left(-3x^2\,\frac{\cos(2x)}{2} + 3x\,\frac{\sin(2x)}{2} + 3\,\frac{\cos(2x)}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$F(\pi) = -3\,\frac{\pi^2}{2} + \frac{3}{4} \qquad F(0) = \frac{3}{4}$$

$$I = F(\pi) - F(0) = -3\,\frac{\pi^2}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = -3\,\frac{\pi^2}{2}$$

4. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{x+1} \\ du = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} \end{array} \right| = \int 2\,du = 2u = 2\sqrt{x+1} + C$$