Курс "Введение в математический анализ"

Практическое задание к уроку 4

Тема "Предел функции"

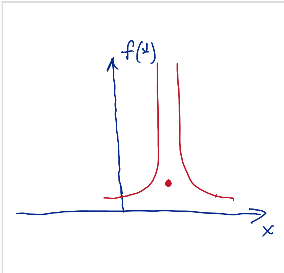
1. Предложить пример функции, не имеющей предела в нуле и в бесконечностях.

$sgn(x)$

2. Привести пример функции, не имеющей предела в точке, но определенной в ней.

$f(x) = \frac{1}{|x-2|}$, когда x не равно 2

$f(2) = 1$



3. Исследовать функцию f(x) = x^3 - x^2 по плану:

a. Область задания и область значений.

b. Нули функции и их кратность.

c. Отрезки знакопостоянства.

d. Интервалы монотонности.

e. Четность функции.

f. Ограниченность.

g. Периодичность.

a. Область задания $dom(f) = \mathbb{R}$

Область значений $ran(f) = \mathbb{R}$

b. Нули функции и их кратность:

$f(x) = x^3 - x^2$

$x^3 - x^2 = 0$

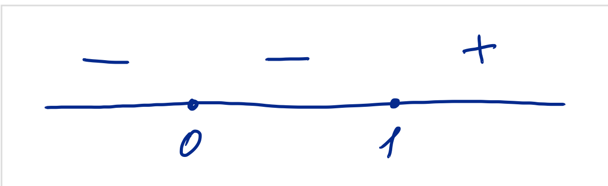
$x^2(x-1) = 0$

$x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

кратность т/м

c. Отрезки знакопостоянства:

- имеются две точки пересечения с осью абсцисс



$x_1 = 0$

$x_2 = 1$

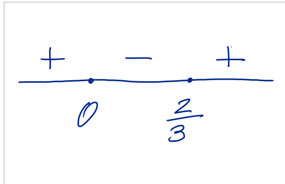
d. Интервалы

монотонности:

$f'(x) = 3x^2 - 2x = 0$

$x \cdot (3x-2) = 0 \quad x_1 = 0$

$3x - 2 = 0 \quad x_2 = \frac{2}{3}$



Интервал возрастания функции

$(-\infty; 0] \cup [\frac{2}{3}; +\infty)$

Интервал убывания функции

$[0; \frac{2}{3}]$

c. Четность функции

четность функции:

$\forall x \in D(f);\ f(x) = f(-x)$

нечетность функции:

$\forall x \in D(f);\ f(-x) = -f(x)$

$f(x) = x^3 - x^2$

$f(2) = 2^3 - 2^2 = 8-4 = 4$

$f(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 = -8-4 = -12$

$\Rightarrow$ функция ни четная, ни нечетная

$f(x) \neq f(-x)$

$f(-x) \neq -f(x)$

f. Ограниченность:

сверху:

$\forall x \in D(f) \exists M \in R : f(x) < M$

снизу:

$\forall x \in D(f) \exists N \in R : f(x) > N$

$f(x) = x^3 - x^2$ не ограничена

g. Периодичность:

$\exists T > 0 : \forall x \in D(f) : f(x) = f(x+T)$

$\forall n \in N : f(x) = f(x+nT)$

$f(x) = x^3 - x^2$ не является периодической функцией

4. Найти предел:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3-2x^2}{4x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \dfrac{x^2(3x-2)}{4\cdot x^2} = \dfrac{3x-2}{4} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \dfrac{1+x-1}{(\sqrt[3]{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \dfrac{1}{2} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1} =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1} \cdot \dfrac{(1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2})}{(1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2})} =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \lim\limits_{x\to 0} (1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}) = \dfrac{3}{2}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{4x+1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{4x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{x}\cdot(4x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x}\cdot(4x+1)} =$

$= e^{\frac{12}{1}} = e^{12}$

Тема "Теоремы о пределах»

1. Найти предел:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{4x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin(x)}{x}\right)^{-1} = 1^{-1} = 1$

d. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{4x+3}{4x-3}\right)^{6x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{6}{4x-3}\right)^{6x} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{6}{4x-3}\right)^{\frac{4x-3}{6} \cdot \frac{6}{4x-3} \cdot 6x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6}{4x-3} \cdot 6x} =$

$= e^{\frac{6\cdot 6}{4}} = e^{9}$

e. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x + \ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{\sin x}{x} + \frac{\ln x}{x}}{1} = 0$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x + \ln x}{x}$ двухсторонний предел не существует

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x + \ln x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to 0^-} (\sin x + \ln x) =$$

$\sqcup\ M > 0\ \&\ \ \delta = 1/M \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{x} < -\frac{1}{1/M} = -M \quad \forall\ -\delta < x < 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$= -\infty \cdot \lim_{x\to 0^-} (\sin x + \ln x) = -\infty \cdot \left(\lim_{x\to 0^-} \sin x + \lim_{x\to 0^-} \ln x\right) =$$

$$= -\infty \cdot \left(\lim_{x\to 0^-} \sin x + (-\infty)\right) = -\infty \cdot (0 - \infty) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x + \ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} (\sin x + \ln x) =$$

$\sqcup\ M > 0\ \&\ \delta = 1/M \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{1/M} = M \quad \forall\ 0 < x < \delta$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$= \infty \cdot \lim_{x\to 0^+} (\sin x + \ln x) = \infty \cdot (0 - \infty) = -\infty$$