(1)

Введение в высшую математику

Практическое задание к уроку 4

1. Задание (на листочке)

Решите уравнение

$\sin(x) / x = 0$

Решение

ОДЗ: $x > 0 \Rightarrow \sin(x) = 0$

Ответ: $x = \pi \cdot n$ для любого целого $n$.

2. Задание (на листочке)

Даны три прямые $y = k1 * x + b1$, $y = k2 * x + b2$, $y = k3 * x + b3$. Как узнать, пересекаются они в одной точке или нет?

Решение

Объединим уравнения прямых в систему, решение которой позволит определить точные координаты точки пересечения прямых:

$$\begin{cases} y = k1 \cdot x + b1 \\ y = k2 \cdot x + b2 \\ y = k3 \cdot x + b3 \end{cases}$$

Если система уравнений:

- имеет единственное решение, то прямые пересекаются

- имеет бесконечное множество решений, то прямые совпадают;
- не имеет решений, то прямые не пересекаются (прямые параллельны между собой).

4. Задание ** (задание делать по желанию)

Решите аналитически и потом численно (в программе) уравнение, зависящее от параметра a:

$\sin(a \cdot x) = 0$

при условии: $0{,}01 < a < 0{,}02$

$100 < x < 500$.

Т.е. надо найти решение x как функцию параметра a - построить график $x = x(a)$.
Если численным методом не получается найти все ветви решения $x(a)$, то отыщите хотя бы одну.

Решение

$\sin(a \cdot x) = 0 \Rightarrow a \cdot x = \pi \cdot n$ при $a \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi \cdot n}{a}$

$100 < x < 500 \Rightarrow 100 < \frac{\pi n}{a} < 500 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{100a}{\pi} < n < \frac{500a}{\pi}$

$0{,}01 < a < 0{,}02 \Rightarrow \frac{1}{\pi} < \frac{100a}{\pi} < \frac{2}{\pi} \Rightarrow$

$\frac{5}{\pi} < \frac{500a}{\pi} < \frac{10}{\pi}$

$$\frac{1}{\pi} < \frac{100a}{\pi} < n \Rightarrow \frac{1}{\pi} < n \Rightarrow n \geq 1$$

$$n < \frac{500a}{\pi} < \frac{10}{\pi} \Rightarrow n < \frac{10}{\pi} \Rightarrow n \leq 3$$

$n = \{1; 2; 3\}$ – 3 ветви

$n = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{a}$ $\quad a = \frac{\pi}{x}$

$n = 2 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{a}$ $\quad a = \frac{2\pi}{x}$

$n = 3 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{a}$ $\quad a = \frac{3\pi}{x}$

$n = 1$

$a = \frac{\pi}{500} = 0.006$ $\qquad a = \frac{\pi}{100} = 0.0314$

$x = \frac{\pi}{0.02} = 157$ $\qquad x = \frac{\pi}{0.01} = 314$

$a \in (0.01; 0.02)$ $\qquad x \in (157; 314)$

$n = 2$

$a = \frac{2\pi}{500} = 0.013$ $\qquad a = \frac{2\pi}{100} = 0.06$

$x = \frac{2\pi}{0.013} = 483$ $\qquad x = \frac{2\pi}{0.02} = 314$

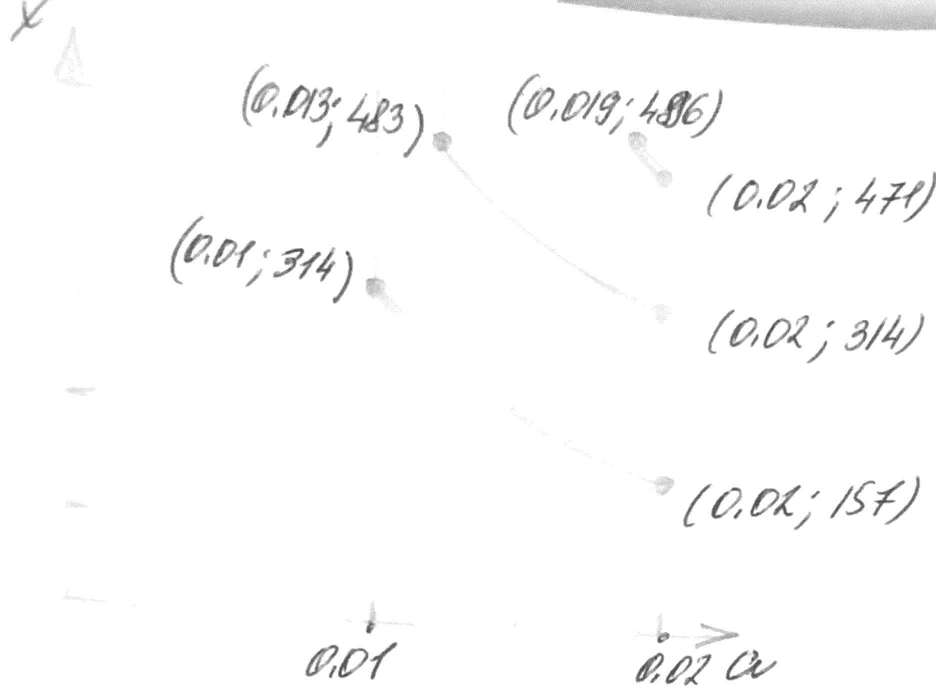
$a \in (0.013; 0.02)$ $\qquad x \in (314; 483)$

$n = 3$

$a = \frac{3\pi}{500} = 0.019$ $\qquad a = \frac{3\pi}{100} = 0.09$

$x = \frac{3\pi}{0.02} = 471$ $\qquad x = \frac{3\pi}{0.019} = 496$

$a \in (0.019; 0.02)$ $\qquad x \in (471; 496)$




17.6.2. Найти угол $\alpha$ между прямыми

$4y - 3x + 12 = 0$ и $7y + x - 14 = 0$

Решение

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{4\cdot 7 + (-3)\cdot 1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{7^2+1^2}} = \frac{25}{5\cdot 7.071} = 0.707$$

Найдем угол $\alpha$:

$$\alpha = \arccos(0.707) = 45.009^\circ$$

Ответ: $\alpha = 45.005^\circ$.

17.6.4. Найти угол $\alpha$ между прямыми

$x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{3}$

$$tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1\cdot k_2}$$

$k_1 = 0$; $k_2 = 0$ $\Rightarrow$ $tg\,\alpha = \frac{0-0}{1+0\cdot 0} = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ$

Ответ: $\alpha = 0^\circ$.

Выясните тип кривых второго порядка, порожденных уравнениями:

17.6.5. $y^2-2x-2y-5=0$

17.6.6. $3x^2+5y^2+12x-30y+42=0$

17.6.7. $2x^2-y^2+6y-7=0$

17.6.8. $2x^2-3y^2-28x-42y-55=0$

Решение.

17.6.5. Дано $-2x+y^2-2y-5=0$

Это уравнение имеет вид:

$a_{11}\cdot x^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+a_{22}y^2+2a_{23}y+a_{33}=0$

где: $a_{11}=0,\ a_{12}=0,\ a_{13}=-1,\ a_{22}=1,\ a_{23}=-1,\ a_{33}=-5$

Вычислим определитель: $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$

$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$ $\quad \Delta=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\bar{y}-1)^2=2\bar{x}+6$

$y'^2=2\bar{x}+6$

Ответ: уравнение является параболой

17.6.6. Дано $3x^2+12x+5y^2-30y+42=0$

Это уравнение имеет вид:

$a_{11}\cdot x^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+a_{22}y^2+2a_{23}y+a_{33}=0$

где: $a_{11}=3,\ a_{12}=0,\ a_{13}=6,\ a_{22}=5,\ a_{23}=-15,\ a_{33}=42$

Вычислим определитель $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$

$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 5\end{vmatrix}$ $\quad \Delta=15\neq 0$

Найдем центр канонической системы координат

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0$$
$$a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0$$

подставим коэффициенты

$$3x_0 + 6 = 0$$
$$5y_0 - 15 = 0 \Rightarrow x_0 = -2\ ;\ y_0 = 3$$

Тем самым перешли к уравнению в системе координат $O'x'y'$

$$a'_{33} + a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 = 0$$

где $a'_{33} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}$

$$a'_{33} = 6x_0 - 15y_0 + 42$$

$$a'_{33} = -15$$

$$\Rightarrow\ 3x'^2 + 5y'^2 - 15 = 0$$

Ответ: уравнение является эллипсом

$$\frac{\bar{x}^2}{\left(\frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}}{\frac{1}{15}\sqrt{15}}\right)^2} + \frac{\bar{y}^2}{\left(\frac{\frac{1}{5}\sqrt{5}}{\frac{1}{15}\sqrt{15}}\right)^2} = 1$$

центр канонической системы координат в точке $O(-2, 3)$

17.6.7. Дано $2x^2 - y^2 + 6y - 7 = 0$

Это уравнение имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

где $a_{11} = 2$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$, $a_{22} = -1$, $a_{23} = 3$, $a_{33} = -7$

Вычислим определитель

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $\Delta = -2 \neq 0$

Найдем центр канонической системы координат.

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0$$
$$a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0$$

$2x_0 = 0$
$3 - y_0 = 0$ $x_0 = 0$, $y_0 = 3$

Тем самым перешли к уравнению в системе координат $O'x'y'$

$$a'_{33} + a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 = 0$$

где $a'_{33} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}$

$a'_{33} = 3y_0 - 7$

$a'_{33} = 2$

$\Rightarrow$ $2x'^2 - y'^2 + 2 = 0$

Ответ: уравнение является гиперболой

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{2} = -1$$

центр канонической системы координат в точке $O$ $(0, 3)$

17.6.8. Дано $2x^2 - 3y^2 - 28x - 42y - 55 = 0$

Это уравнение имеет вид:

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

где $a_{11} = 2$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = -14$, $a_{22} = -3$, $a_{23} = -21$, $a_{33} = -55$

Вычислим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$ $\Delta = -6 \neq 0$

$\Rightarrow$ находим центр канонической системы координат

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0$$

$$a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0$$

$$2x_0 - 14 = 0$$

$$-3y_0 - 21 = 0$$

$x_0 = 7$ ; $y_0 = -7$

Тем самым перешли к уравнению в системе координат $O'x'y'$

$$a'_{33} + a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 = 0$$

где $a'_{33} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}$

$$a'_{33} = -14x_0 - 21y_0 - 55$$

$$a'_{33} = -6$$

$$\Rightarrow \quad 2x'^2 - 3y'^2 - 6 = 0$$

Ответ: уравнение является гиперболой

$$\frac{\bar{x}^2}{3} - \frac{\bar{y}^2}{2} = 1$$

центр канонической системы координат в точке $O$ $(7, -7)$