# Введение в высшую математику

## *Практические задания к уроку 3*

**1. Задание**

Даны два вектора в трехмерном пространстве: (10,10,10) и (0,0,-10)

1) Найдите их сумму. (на листочке)
2) Напишите код на Python, реализующий расчет длины вектора, заданного его координатами. (в программе)

Решение

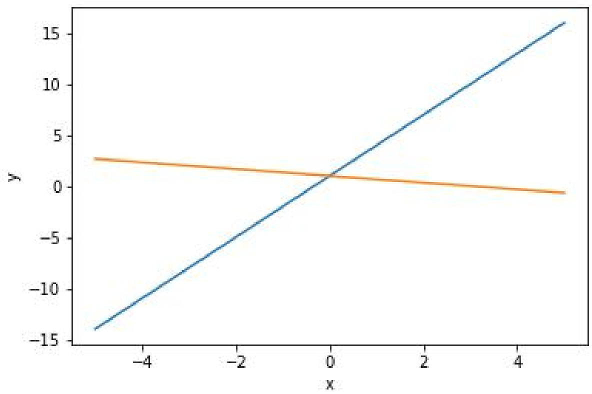
$$\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**2. Задание (на листочке)**

Почему прямые не кажутся перпендикулярными? (см.ролик)

```
x = np.linspace(-5, 5, 21)
y = 3*x+1
y2 = (-1/3)*x+1
plt.plot(x,y)
plt.plot(x,y2)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
```

```
<matplotlib.text.Text at 0x6aa80f0>
```




Решение

Ответ: прямые на графике не кажутся перпендикулярными, так как на графике различные масштабы оси абсцисс и оси ординат.

**4. Задание (на листочке)**

1) Пусть задана плоскость:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

Напишите уравнение плоскости, параллельной данной и проходящей через начало координат.

Решение
1) У параллельных плоскостей коэффициенты A, B и C одинаковые, отличается только коэффициент D. Плоскость проходит через начало координат при D=0. Следовательно, уравнение плоскости, параллельной данной и проходящей через начало координат, следующее:
A*x + B*y + C*z = 0

2) Пусть задана плоскость: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
и прямая:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Как узнать, принадлежит прямая плоскости или нет?

Решение
$A_1$, $B_1$, $C_1$ в уравнении плоскости - это координаты вектора нормали плоскости. Вектор нормали плоскости по определению лежит на прямой, которая перпендикулярна плоскости.
Числа в знаменателях канонического уравнения прямой дают соответствующие координаты направляющего вектора этой прямой.
Любой направляющий вектор прямой, которая лежит в некоторой плоскости, перпендикулярен любому вектору нормали плоскости.

Первым условием принадлежности прямой к плоскости является их параллельность, то есть ортогональность вектора нормали плоскости и направляющего вектора. Следовательно, скалярное произведение векторов равно нулю.
$A_1$*(x2 - x1) + $B_1$*(y2-y1) + $C_1$*(z2 - z1) = 0

Вторым условием принадлежности прямой и плоскости является принадлежность точки к плоскости. В каноническом уравнении прямой в явном виде в числителе после минусов указаны координаты точки ($x_0$, $y_0$, $z_0$). Эти координаты должны удовлетворять уравнению плоскости:
$A_1*x_0 + B_1*y_0 + C_1*z_0 = 0$

# Задание 3

**3.2. Задание**
Докажите, что при ортогональном преобразовании сохраняется расстояние между точками.

Линейное преобразование на плоскости $\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{aligned}$

называется ортогональным, если выполняются соотношения

$$(a_{11})^2 + (a_{21})^2 = 1$$
$$(a_{12})^2 + (a_{22})^2 = 1$$
$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

Пусть точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ посредством ортогонального преобразования переводятся соответственно в точки $M'_1(x'_1, y'_1)$ и $M'_2(x'_2, y'_2)$. Требуется доказать, что отрезки $M_1M_2$ и $M'_1M'_2$ имеют равные длины.