Введение в высшую математику

Практическое задание № 5

5.1 Задание

Вектор - это частной случай матрицы 1×N и N×1. Повторите материал для векторов, уделяя особое внимание умножению А·В.

Вычислите по возможности не используя программирование: $(5E)^{-1}$, где E - единичная матрица размером 5×5.

Решение

$$\left(5 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

Запишем матрицу 5E, дописав к ней справа единичную матрицу. Преобразуем левую часть в единичную.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{array}\right)$$

Ответ: $(5E)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$

5.2. Задание

Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Решение

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - $$
$$- 3 \cdot 0 \cdot 7 - 4 \cdot 2 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = $$

$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 72 - 48 = 60$$

Ответ: 60

5.3 Задание

1. Вычислите матрицу, обратную данной:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение

Определитель данной матрицы равен 60 (>0) поэтому обратная матрица существует. Найдем миноры

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -48 \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -6 \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 32$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -6 \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12 \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

Найдем алгебраические дополнения:

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -48$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = 6$ $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = 32$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = 6$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = -12$ $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = 6$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = 12$ $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = 6$ $A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = -8$

$\Rightarrow$ Матрица алгебраических дополнений:

$$\begin{pmatrix} -48 & 6 & 32 \\ 6 & -12 & 6 \\ 12 & 6 & -8 \end{pmatrix} = C^{*}$$

$\Rightarrow$ Транспонированная матрица C^{*}

$$C^{*T} = \begin{pmatrix} -48 & 6 & 12 \\ 6 & -12 & 6 \\ 32 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Обратная матрица

Ответ:

$$\frac{C^{*T}}{\det A} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{8}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

2. Приведите пример матрицы 4×4, ранг которой равен 1.

Ответ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5.4. Задание

Вычислите скалярное произведение двух векторов: $(1,5)$ и $(2,8)$

Решение

$(\overline{1,5}) * (\overline{2,8}) = 1 \cdot 2 + 5 \cdot 8 = 2 + 40 = 42$

Ответ: 42

5.5. Задание

Вычислите смешанное произведение трех векторов: $(1,5,0)$, $(2,8,7)$ и $(7, 1,5, 3)$

Решение

$\overline{a} \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \\ 7 & 1,5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \cdot 1,5 + 5 \cdot 7 \cdot 7 -$

$- 0 \cdot 8 \cdot 7 - 5 \cdot 2 \cdot 3 - 1,5 \cdot 7 \cdot 1 =$

$= 24 + 0 + 245 - 0 - 30 - 10,5 = 228,5$

Ответ: 228,5