Курс" Линейная алгебра"

Практическое задание урока 5 по теме "Линейные преобразования.

Задание 1.

Найти собственные вектора и собственное значение для линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение.

Найдем собственные значения линейного оператора, составив и решив характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)\cdot(6-\lambda)+12=0$$

$$-6+\lambda-6\cdot\lambda+\lambda^2+12=0$$

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

Найдем дискриминант D:

$$D = b^2-4ac = (-5)^2-4\cdot1\cdot6 = 25-24 = 1$$

Так как $D>0$, то квадратное уравнение имеет два действительных корня:

$$\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{1}}{2\cdot1} = \frac{4}{2} = 2 \ ; \ \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{1}}{2\cdot1} = \frac{6}{2} = 3$$

Собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$

Теперь найдем собственные векторы вида $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, подставив полученные собственные значения в выражение $Ax = \lambda x$

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Для каждого λ найдем его собственные вектора:

1. при $\lambda_1 = 2$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 2 \cdot x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 2 \cdot x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 - 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = -2 \cdot x_2$ Ответ: $x_1 = -2x_2$, $x_2 = x_2$

Общее решение: $X = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Фундаментальная система решений: $\left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Пусть $x_2 = 1$, $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. при $\lambda_2 = 3$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 3x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 - 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 + \frac{3}{2} x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-3}{2} x_2$

Ответ: $x_1 = \frac{-3}{2} x_2$, $x_2 = x_2$

Общее решение: $X = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Фундаментальная система решений: $\left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Пусть $x_2 = 1$, $v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$