Курс "Линейная алгебра"

Практическое задание 3

Задание 1.

1. Установить, какие произведения матриц AB и BA определены, и найти размерности полученных матриц.

а) A - матрица 4×2
B - матрица 4×2 $\Rightarrow$ произведения матриц не определены

б) A - матрица 2×5
B - матрица 5×3 $\Rightarrow$ определено произведение матриц AB размерностью 2×3

в) A - матрица 8×3
B - матрица 3×8 $\Rightarrow$ определены произведения матриц:
AB - матрица 8×8
BA - матрица 3×3

г) A - квадратная матрица 4×4
B - квадратная матрица 4×4 $\Rightarrow$ определены произведения матриц:
AB - матрица 4×4
BA - матрица 4×4

Задание 2.

Найти сумму и произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & -2-1 \\ 3+0 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 4-2\times 0 & 1\times(-1)-2\cdot 5 \\ 3\times 4+0+0 & 3\times(-1)+0\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

Задание 3.

Из закономерностей сложения и умножения матриц на число можно сделать вывод, что матрицы одного размера образуют линейное пространство. Вычислить линейную комбинацию $3A-2B+4C$ для матриц

$A=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

Решение.

$$3A-2B+4C=3\times\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & -6\end{pmatrix}-2\times\begin{pmatrix}0 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 21\\ 9 & -18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -10\\ -4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & -16\\ 4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -5\\ 9 & -12\end{pmatrix}$$

Задание 4.

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Вычислить AA^T и A^TA

Решение.

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 4+1\cdot 1 & 4\cdot 5+1\cdot(-2) & 4\times 2+1\times 3 \\ 5\times 4-2\cdot 1 & 5\cdot 5-2\cdot(-2) & 5\times 2-2\cdot 3 \\ 2\cdot 4+3\cdot 1 & 2\cdot 5+3\cdot(-2) & 2\cdot 2+3\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 4+5\cdot 5+2\cdot 2 & 4\cdot 1+5\cdot(-2)+2\cdot 3 \\ 1\cdot 4-2\cdot 5+3\cdot 2 & 1\cdot 1-2\cdot(-2)+3\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Практическое задание 4

Задание 1.

Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = \underline{1}$

б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$

$= (5 \cdot 9 - 8 \cdot 6) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 7 \cdot 6) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 7 \cdot 5) =$

$= -3 + 12 - 9 = 0$

Задание 2.

Определитель матрицы A равен 4. Найти:

а) $\det(A^2) = \det A \cdot \det A = 4 \times 4 = 16$

б) $\det(A^T) = \det(A) = 4$

в) $\det(2A) = 2 \cdot \det(A) = 2 \cdot 4 = 8$

Задание 3.

Доказать, что матрица $\begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ вырожденная.

Решение.

Найдем определитель матрицы

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -14 & 6 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 13 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -14 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (-14 \cdot 13 - 7 \cdot 6) - 7 \cdot (4 \cdot 13 + 3 \cdot 6) - 3 \cdot (4 \cdot 7 - 3 \cdot 14) =$$

$$= 448 - 490 + 42 = 0$$

Определитель равен нулю $\Rightarrow$ матрица вырожденная

Задание 4.

Задание 4.

а) Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение.

Третья строка является суммой первой и второй строк $\Rightarrow$ её можно отбросить.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Ранг матрицы равен 2.

б) Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение.

Умножение всех элементов первого столбца на 1,5 даёт второй столбец, а значит второй столбец можно отбросить.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$ сложение первой и второй строки даёт третью строку, а значит, третью строку можно отбросить

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$ Ранг матрицы равен 3