Курс "Линейная алгебра"

Практическое задание урока 1

Задание 1.
Исследовать на линейную зависимость:
$f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x+1$, $f_4(x) = x - e^x$

Решение.
Заметим, что

$$f_4(x) = x - f_1(x) = f_3(x) - f_2(x) - f_1(x),$$

то есть вектор $f_4(x)$ является линейной комбинацией векторов $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, из чего можно сделать вывод, что данные векторы линейно зависимы.

Задание 2.
Исследовать на линейную зависимость:
$f_1(x) = 2$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = (x+1)^2$

Решение.
$f_4(x) = x^2 + 2x + 1$. Заметим, что

$$f_4(x) = f_3(x) + 2 \cdot f_2(x) + \frac{1}{2} \cdot f_1(x),$$

то есть вектор $f_4(x)$ является линейной комбинацией векторов $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, из чего можно сделать вывод, что данные векторы линейно зависимы.

Задание 3.

Найти координаты вектора $x=(2,3,5)\in R^3$

в базисе $b_1=(0,0,10)$, $b_2=(2,0,0)$, $b_3=(0,1,0)$

Решение.

$x=(2,3,5)=(2,0,0)+(0,3,0)+(0,0,5)=$

$=1\times(2,0,0)+3\times(0,1,0)+\frac{1}{2}\times(0,0,10)=$

$=1\times b_2+3\times b_3+\frac{1}{2}\times b_1$

То есть координатами вектора x в данном базисе являются $(\frac{1}{2};1;3)$

Задание 4

Найти координаты вектора $3x^2-2x+2\in R^3[x]$:

а) в базисе $1, x, x^2$;

б) в базисе $x^2, x-1, 1$.

Решение.

а) $\alpha_1=1$, $\alpha_2=x$, $\alpha_3=x^2$

$3x^2-2x+2=3\cdot\alpha_3-2\cdot\alpha_2+2\cdot\alpha_1$

То есть координатами данного вектора в базисе $1, x, x^2$ являются $(2;-2;3)$

б) $\alpha_1=x^2$, $\alpha_2=x-1$, $\alpha_3=1$

$3x^2-2x+2=3x^2-2(x-1)+0=$

$=3\cdot\alpha_1-2\cdot\alpha_2+0\cdot\alpha_3$

То есть координатами данного вектора в базисе $x^2, x-1, 1$ являются $(3;-2;0)$.

Задание 5.

Установить, является ли линейным подпространством.

а) совокупность всех векторов трехмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю,

б) все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

Решение.

1. Проведя проверку по приведенному утверждению, мы увидим, что

$(0, a, b) + (0, c, d) = (0, a+c, b+d)$

$(a, 0, b) + (c, 0, d) = (a+c, 0, b+d)$

$(0, 0, a) + (0, 0, b) = (0, 0, a+b)$

$\alpha \times (0, a, b) = (0, \alpha \cdot a, \alpha \cdot b)$

$\alpha \times (a, 0, b) = (\alpha \cdot a, 0, \alpha \cdot b)$

$\alpha \times (0, 0, a) = (0, 0, \alpha \cdot a)$

Полученные векторы также принадлежат указанному в задании множеству всех векторов, то есть данное множество является линейным подпространством.

2. Для векторов, являющихся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ верно следующее:

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0, \quad y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0$

Проведя проверку по приведенному утверждению, мы увидим, что:

$x + y = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = 0 + 0 = 0$

$\alpha \cdot x = \alpha \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \alpha \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ множество всех этих векторов является линейным подпространством пространства R^n.

Практическое задание 2

Задание 1.

Найти скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}$;

а) $x = (0, -3, 6)$, $y = (-4, 7, 9)$;

б) $x = (7, -4, 0, 1)$, $y = (-3, 1, 11, 2)$.

Решение.

1. $x \cdot y = (0, -3, 6) \times (-4, 7, 9) = 0 \cdot (-4) - 3 \cdot 7 + 6 \cdot 9 = 33$

2. $x \cdot y = (7, -4, 0, 1) \times (-3, 1, 11, 2) = 7 \times (-3) - 4 \cdot 1 + 0 \cdot 11 + 1 \cdot 2 = -23$

Задание 2.

Найти нормы векторов $(4,2,4)$ и $(12,3,4)$ и угол между ними.

Решение.

Определим норму вектора $(4,2,4)$

$$\|x\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

Определим норму вектора $(12,3,4)$

$$\|y\| = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{169} = 13$$

Косинус угла между векторами определяется соотношением $\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$

$(x, y) = (4,2,4) \times (12,3,4) = 4 \cdot 12 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 70$

$\cos\varphi = \frac{70}{6 \times 13} \approx 0{,}897$

Угол между x и y: $0{,}46$

Задание 3.

Будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:

а) произведение длин векторов

б) утроенное обычное произведение векторов

Решение.

(а) Проверим аксиомы 1-4:

1. $(x,y) = |\bar{x}|\cdot|\bar{y}| = |\bar{y}|\cdot|\bar{x}| = (y,x)$

2. $(\lambda x, y) = \lambda|\bar{x}|\cdot|\bar{y}| = \lambda\cdot(x,y)$

3. $(x_1+x_2, y) = |\overline{x_1+x_2}|\cdot|\bar{y}| = |\bar{x_1}|\cdot|\bar{y}| + |\bar{x_2}|\cdot|\bar{y}| =$
$= (x_1,y) + (x_2,y)$

4. $(x,x) \geq 0$
$(x,x) = |\bar{x}|\cdot|\bar{x}| \geq 0$ причем $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$\Rightarrow$ линейное пространство является евклидовым.

(б) Проверим аксиомы 1-4:

1. $3\cdot(x,y) = 3(y,x)$

2. $3(\lambda x,y) = 3\lambda(x,y)$

3. $3\cdot(x_1+x_2,y) = 3\cdot(x_1,y) + 3\cdot(x_2,y)$

4. $3\cdot(x,x) \geq 0$, причем $3(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$\Rightarrow$ линейное пространство является евклидовым.

Задание 4

Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пространстве R^3:

а) $(1,0,0)$, $(0,0,1)$;

б) $(1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}, 0)$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $(0,0,1)$;

в) $(1/2, -1/2, 0)$, $(0, 1/2, 1/2)$, $(0,0,1)$;

г) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

Решение.

Базис евклидова пространства является ортонормированным, если его векторы попарно ортогональны и длина каждого из них равна единице

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i = 1,2,\dots,n, \ j = 1,2,\dots,n.$$

а) $$\begin{cases} 1\times 1 + 0\times 0 + 0\times 0 = 1 \\ 0\times 0 + 0\times 0 + 1\times 1 = 1 \\ 1\times 0 + 0\cdot 0 + 0\times 1 = 0 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ векторы образуют ортонормированный базис

б) $$\begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 = 1 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 = 1 \\ 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\times 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times 0 + 0\times 1 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\times 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\times 0 + 0\times 1 = 0 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ векторы образуют ортонормированный базис в) $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2=\frac{1}{8}\neq 1$

$\Rightarrow$ векторы не образуют ортонормированный базис

г) $\begin{cases} 1^2+0+0=1 \\ 0+1^2+0=1 \\ 0+0+1^2=1 \\ 1\times 0+0\times 1+0\times 0=0 \\ 1\times 0+0\times 0+0\times 1=0 \\ 0\times 0+1\times 0+0\times 1=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ векторы образуют ортонормированный базис