

Курс" Линейная алгебра"

Практическое задание урока 6 по теме «Системы линейных уравнений»

Задание 1.

Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -2 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - 5x_4 = 2 \\ x_3 - \frac{3}{2}x_4 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 + x_3 + 2x_4 \\ x_2 &= 2 + x_3 + 5x_4 \\ x_3 &= -2 + \frac{3}{2}x_4 \end{aligned} \quad , \quad \text{где } x_4 - \text{произвольное действительное число}$$

$$x_1 = -2 - 3x_4 \quad x_4 = \lambda \quad \text{Тогда:}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{13}{2}x_4 & x_1 &= -2 - 3\lambda \\ x_3 &= -2 + \frac{3}{2}x_4 & x_2 &= \frac{13}{2}\lambda \\ & & x_3 &= -2 + \frac{3}{2}\lambda \\ & & x_4 &= \lambda \end{aligned} \quad \text{где } \lambda - \text{произвольное действительное число}$$

Решение:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{13}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda$$

Практическое задание урока 7 по теме «Системы линейных уравнений»

Задание 2.

а) Найти L-матрицу LU-разложения для матрицы коэффициентов

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 26 & 30 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & 18 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right) \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

б) Найти L-матрицу LU-разложения для матрицы коэффициентов

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 18 & 29 & 18 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 22 & 53 & 33 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 23 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 45 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -5 & 4 & 6 & 7 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 4 & 6 & 7 & 1 \end{array} \right)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Вопрос 6.

При каком значении параметра a следующая система линейных уравнений не имеет решений

$$\begin{cases} x + y + 7z = -7 \\ 2x + 3y + 17z = -16 \\ x + 2y + (a^2 + 1)z = 3a \end{cases}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -7 \\ 2 & 3 & 17 & -16 \\ 1 & 2 & a^2+1 & 3a \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & a^2-6 & 3a+7 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & a^2-9 & 3a+9 \end{array} \right)$$

$$a^2 - 9 = 3a + 9$$

$$a^2 - 3a - 18 = 0$$

$$a = 3 \Rightarrow \text{ранг } A = 2, \text{ ранг расширенной матрицы} = 3$$

$$a = -3 \Rightarrow \text{ранг } A = 2, \text{ ранг расширенной матрицы} = 2$$

Ответ: при $a = 3$ система не имеет решений