Урок 5. Проверка статистических гипотез. P-значения. Доверительные интервалы. A/B-тестирование

1. Известно, что генеральная совокупность распределена нормально со средним квадратическим отклонением, равным 16. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a с надежностью 0.95, если выборочная средняя M = 80, а объем выборки n = 256.

$\bar{x} = M = 80$, $n = 256$, $\sigma = 16$, $\gamma = 0{,}95$. Дисперсия известна

Решение.

Найдем доверительный интервал для математического ожидания a с надежностью 0.95, используя формулу:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

Число $z_{\frac{\alpha}{2}}$ определяется по таблице значений функции Лапласа из равенства

$$\varphi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$$

$$80 - 1{,}96 \cdot \frac{16}{\sqrt{256}} < a < 80 + 1{,}96 \cdot \frac{16}{\sqrt{256}}$$

$$78{,}04 < a < 81{,}96$$

Ответ: $(78{,}04; 81{,}96)$

2. В результате 10 независимых измерений некоторой величины X, выполненных с одинаковой точностью, получены опытные данные: 6.9, 6.1, 6.2, 6.8, 7.5, 6.3, 6.4, 6.9, 6.7, 6.1
Предполагая, что результаты измерений подчинены нормальному закону распределения вероятностей, оценить истинное значение величины X при помощи доверительного интервала, покрывающего это значение с доверительной вероятностью 0,95.

$\gamma = 0{,}95 \quad n = 10$ дисперсия неизвестна

Решение.

Определим среднее арифметическое и исправленную дисперсию выборки:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{65{,}9}{10} = 6{,}59$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - 6{,}59)^2}{10-1} = 0{,}20322$$

Найдем доверительный интервал для оценки неизвестного истинного значения среднего m по формуле:

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\frac{S}{\sqrt{n}},$$

По таблице критических точек t-критерия Стьюдента для уровня значимости $\alpha = 0.05$:

$$t\left(\frac{\alpha}{2}; n-1\right) = t(0.025;\ 10-1) = 2{,}262,$$

где $n-1 = 9$ – число степеней свободы

$$t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} = 2.262 \cdot \sqrt{\frac{0{,}20322}{10}} \approx 0{,}322$$

Искомый доверительный интервал для среднего:

$$6.59 - 0{,}322 < m < 6.59 + 0{,}322$$

$$6.268 < m < 6.912$$

Ответ: $(6.268;\ 6{,}912)$

3,4 задачи решать через тестирование гипотезы

3. Утверждается, что шарики для подшипников, изготовленные автоматическим станком, имеют

средний диаметр 17 мм.
Используя односторонний критерий с α=0,05, проверить эту гипотезу,
если в выборке из n=100 шариков средний диаметр оказался равным 17.5 мм, а дисперсия известна и равна 4 кв.мм

Решение.

$S^2=4$, $n=100$, $\alpha=0.05$, $\mu_0=17$, $\bar{X}=17.5$

1. Основная гипотеза H_0: диаметр $=17$ мм, $\mu=\mu_0$
Альтернативная гипотеза H_1: диаметр $=17.5$ мм, $\mu>\mu_0$

2. Применим критерий Z-тест, так как дисперсия известна.

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

3. Уровень значимости $\alpha=0.05$ (односторонняя критическая область)

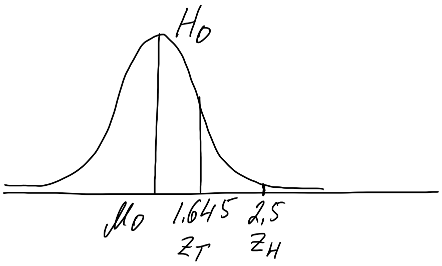
4. Найдем критическое значение $Z_{кр}$ таблице нормального распределения

$\Phi(Z_{кр})=0{,}05 \Rightarrow Z_{кр}=1{,}645$

5. Найдем наблюдаемое значение $Z_н$

$$\frac{S}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{4}{100}}=0.2$$

$$Z_H=\frac{17.5-17}{0.2}=\frac{0.5}{0.2}=2.5$$



$2.5>1.645$

$Z_H>Z_T$

$\Rightarrow$ верна гипотеза H_1 на уровне значимости $\alpha=0{,}05$

Ответ: Основная гипотеза неверна

4. Продавец утверждает, что средний вес пачки печенья составляет 200 г. Из партии извлечена

выборка из 10 пачек. Вес каждой пачки составляет: 202, 203, 199, 197, 195, 201, 200, 204, 194, 190. Известно, что их веса распределены нормально. Верно ли утверждение продавца, если учитывать, что доверительная вероятность равна 99%?

$\mu_0 = 200$, $\gamma = 0.99$

Решение.

1. Основная гипотеза H_0: средний вес = 200 гр, $\mu = \mu_0$

Определим среднее арифметическое и дисперсию выборки:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 198.5$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 19.833$$

Альтернативная гипотеза H_1: средний вес 198.5 см

$\mu < \mu_0$

2. Применим критерий

$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S}$ – случайная величина, имеющая распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы

3. Уровень значимости $\alpha = 0.01$

4. Найдем критическое значение $t_{кр}$ по таблице критических точек t-критерия Стьюдента:

$$t_{кр} = t\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right) = t(0.005, 9) = 3.25$$

5. Определяем наблюдаемое значение $t_н$:

$$t_н = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S} = \frac{198.5 - 200}{\sqrt{S^2}} = \frac{198.5 - 200}{\sqrt{19.833}} \approx -0.337$$

$-0.337 < 3.25$

$t_н < t_{кр}$

$\Rightarrow$ верна гипотеза H_0 на уровне значимости $\alpha = 0.01$

Ответ: утверждение продавца верно