Урок 4. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность распределения вероятностей. Равномерное и нормальное распределение. Центральная предельная теорема

1. Случайная непрерывная величина A имеет равномерное распределение на промежутке (200, 800].
   Найдите ее среднее значение и дисперсию

Так как $a = 200$ и $b = 800$, то:

Среднее значение равно:

$$M(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{200+800}{2} = 500$$

Дисперсия равна:

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(800-200)^2}{12} = 30000$$

2. О случайной непрерывной равномерно распределенной величине B известно, что ее дисперсия равна 0.2. Можно ли найти правую границу величины B и ее среднее значение зная, что левая граница равна 0.5?
   Если да, найдите ее.

Так как $D(X) = 0{,}2$ и $a = 0{,}5$, то:

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$(b-a)^2 = 12 \cdot D(X) \qquad b-a = \sqrt{12 \cdot D(X)}$$

$$b = a + \sqrt{12 \cdot D(X)}$$

$$b = 0{,}5 + \sqrt{12 \cdot 0{,}2} \approx 2{,}049$$

3. Непрерывная случайная величина X распределена нормально и задана плотностью распределения

f(x) = (1 / (4 * sqrt(2*pi))) * (exp(-((x+2)** 2) / 32))
Найдите:
а). M(X)
б). D(X)
в). std(X) (среднее квадратичное отклонение)

$$f(x) = \frac{1}{4\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{(x+2)^2}{32}}$$

Общая формула плотности вероятности при нормальном распределении непрерывной случайной величины:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $a = M(X)$, $\sigma^2 = D(X)$

Из заданной формулы плотности вероятности следует, что:

а) $M(X) = a = -2$

б) $2\sigma^2 = 32 \Rightarrow \sigma^2 = D(X) = 16$

в) $std(X) = \sqrt{D(X)} = \sigma = 4$

4. Рост взрослого населения города X имеет нормальное распределение. Причем, средний рост равен 174 см, а среднее квадратичное отклонение равно 8 см. Какова вероятность того, что случайным образом выбранный взрослый человек имеет рост:

а). больше 182 см
б). больше 190 см
в). от 166 см до 190 см
г). от 166 см до 182 см
д). от 158 см до 190 см

е). не выше 150 см или не ниже 190 см
ё). не выше 150 см или не ниже 198 см
ж). ниже 166 см.

Функция распределения $F(X)$ случайной величины может быть выражена через функцию Лапласа

$$F(X) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

Вероятность того, что случайная величина при нормальном распределении примет значение, принадлежащее интервалу $[x_1; x_2]$

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right)$$

↳ закрытый, открытый интервал или полуинтервал не имеет значения

Значения Φ будем находить по таблице.

Так как $a = 174$ и $\sigma = 8$, то:

а) $P(X>182) = 1-\left(\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{182-174}{8}\right)\right) = \frac{1}{2} - \Phi(1) = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$

$P(182<X<\infty) = \Phi\left(\frac{\infty-174}{8}\right) - \Phi\left(\frac{182-174}{8}\right) = \Phi(\infty) - \Phi(1) =$

$= 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$

б) $P(X>190) = 1-\left(\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{190-174}{8}\right)\right) = \frac{1}{2} - \Phi(2) = \frac{1}{2} - 0{,}4772 = 0{,}0228$

в) $P(166<X<190) = \Phi\left(\frac{190-174}{8}\right) - \Phi\left(\frac{166-174}{8}\right) = \Phi(2) - \Phi(-1) =$

$= \Phi(2) + \Phi(1) = 0{,}4772 + 0{,}3413 \approx 0{,}8185$

г) $P(166<X<182) = \Phi\left(\frac{182-174}{8}\right) - \Phi\left(\frac{166-174}{8}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) =$

$= 2 \cdot \Phi(1) = 2 \cdot 0{,}3413 = 0{,}6826$

д) $P(158<X<190) = \Phi\left(\frac{190-174}{8}\right) - \Phi\left(\frac{158-174}{8}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) =$

$= 2 \cdot \Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544$

е)

$$P(0<X<150)+P(190<X<\infty)=$$

$$=\Phi\left(\frac{150-174}{8}\right)-\Phi\left(\frac{0-174}{8}\right)+\Phi\left(\frac{\infty-174}{8}\right)-\Phi\left(\frac{190-174}{8}\right)=$$

$$=\Phi(-3)-\Phi(-21{,}75)+\Phi(\infty)-\Phi(2)=$$

$$=-\Phi(3)+\Phi(21{,}75)+0{,}5-\Phi(2)=$$

$$=-0{,}49865+0{,}5+0{,}5-0{,}4772=0{,}02415$$

ё)

$$P(0<X<150)+P(198<X<\infty)=$$

$$=\Phi\left(\frac{150-174}{8}\right)-\Phi\left(\frac{0-174}{8}\right)+\Phi\left(\frac{\infty-174}{8}\right)-\Phi\left(\frac{198-174}{8}\right)=$$

$$=\Phi(-3)-\Phi(-21{,}75)+\Phi(\infty)-\Phi(3)=$$

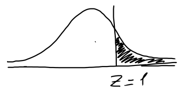
$$=-0{,}49865\times 2+0{,}5\cdot 2=0{,}0027$$

ж) $P(0<X<166)=\Phi\left(\frac{166-174}{8}\right)-\Phi\left(\frac{0-174}{8}\right)=$

$$=\Phi(-1)-\Phi(-21{,}75)=-\Phi(1)+0{,}5=-0{,}3413+0{,}5=0{,}1587$$

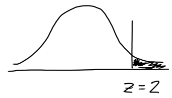
Второй способ решения: с использованием таблицы нормального распределения

а) $Z = \frac{182-174}{8} = 1 \Rightarrow N(1) = 0{,}15866$



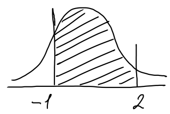
$P = 0{,}15866$

б) $z = \frac{190-174}{8} = 2 \Rightarrow N(2) = 0.02275$



$P = 0{,}02275$

в) $z_1 = \frac{190-174}{8} = 2 \Rightarrow N(2) = 0{,}9772$

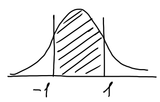


$z_2 = \frac{166-174}{8} = -1 \Rightarrow N(-1) = 0{,}1587$

$P(166 < X < 190) = 0{,}9772 - 0{,}1587 = 0{,}8185$

г) $z_1 = \frac{182-174}{8} = 1 \Rightarrow N(1) = 0{,}8413$

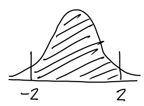
$z_2 = \frac{166-174}{8} = -1 \Rightarrow N(-1) = 0.1587$



$P(166 < X < 182) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 0{,}6826$

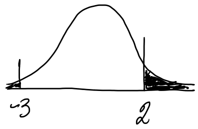
д) $z_1 = \frac{190-174}{8} = 2 \Rightarrow N(2) = 0{,}9772$

$z_2 = \frac{158-174}{8} = -2 \Rightarrow N(-2) = 0{,}0228$



$P(158 < X < 190) = 0{,}9772 - 0.0228 = 0{,}9544$

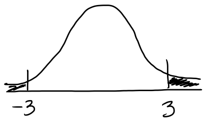
е) $z_1 = \dfrac{190-174}{8} = 2 \Rightarrow N(2) = 0.02275$



$z_2 = \dfrac{150-174}{8} = -3 \Rightarrow N(-3) = 0.0013$

$P(X<150, X>190) = 0.02275 + 0,0013 = 0,02405$

ё) $z_1 = \dfrac{198-174}{8} = 3 \Rightarrow N(3) = 0.00135$

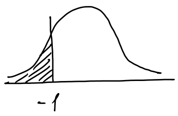


$z_2 = \dfrac{150-174}{8} = -3 \Rightarrow N(-3) = 0.0013$

$P(X<150, X>198) = 0.00135 + 0,0013 = 0,00265$

ж) $z = \dfrac{166-174}{8} = -1 \Rightarrow N(-1) = 0,1587$

$P = 0,1587$

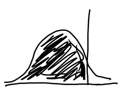


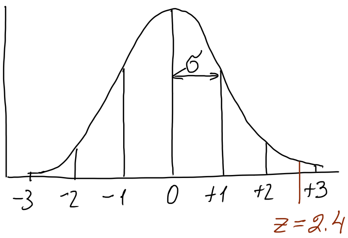
5. На сколько сигм (средних квадратичных отклонений) отклоняется рост человека, равный 190 см, от математического ожидания роста в популяции, в которой M(X) = 178 см и D(X) = 25 кв.см?

$X = 190$ и $m = M(X) = 178$ и $\sigma = \sqrt{D(X)} = 5$

$z = \dfrac{x-m}{\sigma} = \dfrac{190-178}{5} = 2,4$

$N(z) = N(2,4) = 0,9918$





для 3σ: $N(3) = 0,9987$

Ответ: отклонение от математического ожидания равно 2.4 сигмы