Урок 1. Случайные события. Условная вероятность. Формула Байеса. Независимые испытания

1. Из колоды в 52 карты извлекаются случайным образом 4 карты.
а) Найти вероятность того, что все карты – крести.
б) Найти вероятность, что среди 4-х карт окажется хотя бы один туз.

В колоде 13 карт – крести
а) вероятность достать карту крести;
первую $\frac{13}{52}$; вторую $\frac{12}{51}$; третью $\frac{11}{50}$; четвертую $\frac{10}{49}$

Искомая вероятность $= \frac{10 \times 11 \times 12 \times 13}{49 \times 50 \times 51 \times 52} \approx 0.003$

Иначе:
1) общее число способов выбрать 4 карты из 52 равно числу сочетаний из 52 по 4 C_{52}^{4}
2) благоприятствующее событие – число способов вынуть из 13 карт крести 4 C_{13}^{4}
3) Искомая вероятность $= \frac{C_{13}^{4}}{C_{52}^{4}} = \frac{13!}{(13-4)!\cdot 4!} : \frac{52!}{(52-4)!\cdot 4!} =$

$$= \frac{13!\cdot 48!}{9!\cdot 52!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{49\cdot 50\cdot 51\cdot 52} \approx 0.003$$

б) Всего карт без тузов $52-4=48$.
Вероятность, что среди выбранных 4-х карт не будет туза равна

$$P = \frac{C_{48}^{4}}{C_{52}^{4}} = \frac{\frac{48!}{44!\,4!}}{\frac{52!}{48!\cdot 4!}} = \frac{45\cdot 46\cdot 47\cdot 48}{49\cdot 50\cdot 51\cdot 52} = \frac{116748}{162435}$$

Тогда вероятность, что среди извлеченных карт окажется хотя бы один туз равна

$$\overline{P} = 1 - P = 1 - \frac{116748}{162435} = \frac{45687}{162435} \approx 0.281$$

2. На входной двери подъезда установлен кодовый замок, содержащий десять кнопок с цифрами от 0 до 9. Код
содержит три цифры, которые нужно нажать одновременно. Какова вероятность того, что человек, не
знающий код, откроет дверь с первой попытки?

Число сочетаний из 10 цифр по 3 цифры в каждом (порядок не важен, так как нужно нажать одновременно) равно:

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

Вероятность открыть с первой попытки равна

$$p = \frac{1}{120} \approx 0.008$$

3. В ящике имеется 15 деталей, из которых 9 окрашены. Рабочий случайным образом извлекает 3 детали. Какова вероятность того, что все
извлеченные детали окрашены?

Вероятность достать окрашенную деталь:
первую $\frac{9}{15}$; вторую $\frac{8}{14}$; третью $\frac{7}{13}$

Искомая вероятность $= \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{13 \cdot 14 \cdot 15} \approx 0,185$

Иначе:
1) общее число способов выбрать 3 детали из 15 равно числу сочетаний из 15 по 3 C_{15}^{3}
2) благоприятствующее событие — число способов вынуть из 9 окрашенных деталей 3 C_{9}^{3}
3) Искомая вероятность $= \frac{C_{9}^{3}}{C_{15}^{3}} = \frac{9!}{(9-3)! \cdot 3!} : \frac{15!}{(15-3)! \cdot 3!} =$

$$= \frac{9! \cdot 12!}{6! \cdot 15!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{13 \cdot 14 \cdot 15} \approx 0,185$$

4. В лотерее 100 билетов. Из них 2 выигрышных. Какова вероятность того, что 2 приобретенных билета окажутся выигрышными?

Вероятность достать выигрышный билет:

первый $\frac{2}{100}$; второй $\frac{1}{99}$

Искомая вероятность $= \frac{2}{100} \times \frac{1}{99} = \frac{1}{4950}$

Иначе:

1) общее число способов выбрать 2 билета из 100 равно числу сочетаний из 100 по 2 C^2_{100}

2) благоприятствующее событие – число способов выбрать из 2 выигрышных билетов 2 C^2_2

3) Искомая вероятность $= \frac{C^2_2}{C^2_{100}} = \frac{2!}{(2-2)! \cdot 2!} : \frac{100!}{(100-2)! \cdot 2!} =$

$$= \frac{2! \cdot 98!}{1 \cdot 100!} = \frac{1 \cdot 2}{99 \cdot 100} = \frac{1}{4950}$$