Урок 3. Описательная статистика. Качественные и количественные характеристики популяции. Графическое представление данных

1. Даны значения зарплат из выборки выпускников: 100, 80, 75, 77, 89, 33, 45, 25, 65, 17, 30, 24, 57, 55, 70, 75, 65, 84, 90, 150.
   Посчитать (желательно без использования статистических методов наподобие std, var, mean) среднее арифметическое,
   среднее квадратичное отклонение, смещенную и несмещенную оценки дисперсий для данной выборки.

$n = 20$

Среднее арифметическое равно

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\bar{X} = (100+80+75+77+89+33+45+25+65+17+30+24+57+55+70+75+65+84+90+150)/20 = 65.3$$

Среднее квадратичное отклонение равно:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-65.3)^2}{20-1}} = \sqrt{1000.116} \approx 31.62$$

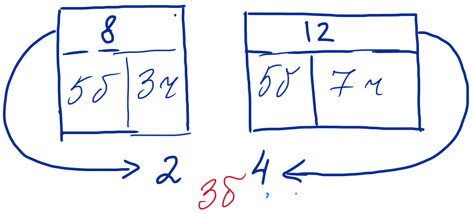
Смещенная оценка дисперсии равна

$$S^2 \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-65.3)^2}{20} \approx 950.11$$

Несмещенная оценка дисперсии равна

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-65.3)^2}{20-1} \approx 1000.116$$

2. В первом ящике находится 8 мячей, из которых 5 - белые. Во втором ящике - 12 мячей, из которых 5 белых.
Из первого ящика вытаскивают случайным образом два мяча, из второго - 4. Какова вероятность того, что 3 мяча белые?



$$P_1 = \frac{\overset{\text{2б}}{C_5^2}}{C_8^2} \cdot \frac{\overset{\text{1б}}{C_5^1} \cdot \overset{\text{3ч}}{C_7^3}}{C_{12}^4} \approx 0.126$$

$$P_2 = \frac{\overset{\text{1б}}{C_5^1} \cdot \overset{\text{1ч}}{C_3^1}}{C_8^2} \cdot \frac{\overset{\text{2б}}{C_5^2} \cdot \overset{\text{2ч}}{C_7^2}}{C_{12}^4} \approx 0.227$$

$$P_3 = \frac{\overset{\text{2ч}}{C_3^2}}{C_8^2} \cdot \frac{\overset{\text{3б}}{C_5^3} \cdot \overset{\text{1ч}}{C_7^1}}{C_{12}^4} \approx 0.015$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 \approx 0.126 + 0.227 + 0.015 \approx 0.369$$

3. На соревновании по биатлону один из трех спортсменов стреляет и попадает в мишень. Вероятность попадания для первого спортсмена равна 0.9, для второго — 0.8, для третьего — 0.6. Найти вероятность того, что выстрел произведен: а). первым спортсменом б). вторым спортсменом в). третьим спортсменом.

A – мишень поражена

H_i – стреляет один из спортсменов, $i = 1, 2, 3$

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(A|H_1) = 0{,}9 \quad P(A|H_2) = 0{,}8 \quad P(A|H_3) = 0{,}6$$

Полная вероятность поражения мишени:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}9 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}8 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}6 = 0{,}767$$

По формуле Байеса вероятность того, что выстрел произведен

а) первым спортсменом

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}9}{0{,}767} \approx 0{,}391$$

б) вторым спортсменом

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}8}{0{,}767} \approx 0{,}348$$

в) третьим спортсменом

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}6}{0{,}767} \approx 0{,}261$$

4. В университет на факультеты А и В поступило равное количество студентов, а на факультет С студентов поступило столько же, сколько на А и В вместе. Вероятность того, что студент факультета А сдаст первую сессию, равна 0.8. Для студента факультета В эта вероятность равна 0.7, а для студента факультета С - 0.9. Студент сдал первую сессию. Какова вероятность, что он учится: а). на факультете А б). на факультете В в). на факультете С?

A – студент сдал первую сессию

H_1, H_2, H_3 – студент на факультете А, В или С

Вероятность обучения студента на факультете:

$$\underset{A}{P(H_1) = \frac{1}{4}} \qquad \underset{B}{P(H_2) = \frac{1}{4}} \qquad \underset{C}{P(H_3) = \frac{1}{2}}$$

$$P(A|H_1) = 0{,}8 \qquad P(A|H_2) = 0{,}7 \qquad P(A|H_3) = 0{,}9$$

Полная вероятность сдачи сессии равна:

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot 0{,}8 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}7 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}9 = 0{,}825$$

По формуле Байеса вероятность того, что студент, сдавший сессию, учится

а) на факультете А

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4} \times 0{,}8}{0{,}825} \approx 0{,}242$$

б) на факультете В

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4} \times 0{,}7}{0{,}825} \approx 0{,}212$$

в) на факультете С

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0{,}9}{0{,}825} \approx 0{,}545$$

5. Устройство состоит из трех деталей.
   Для первой детали вероятность выйти из строя в первый месяц равна 0.1, для второй - 0.2, для третьей - 0.25.
   Какова вероятность того, что в первый месяц выйдут из строя:
   а). все детали б). только две детали в). хотя бы одна деталь г). от одной до двух деталей?

A_i – деталь вышла из строя, $i = 1, 2, 3$
Вероятность выхода детали из строя:
$p_i = P(A_i)$
Вероятность, что деталь не вышла из строя:
$q_i = 1 - p_i = P(\bar{A}_i)$

а) X_3 – три детали вышли из строя

$$P(X_3) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$$

$$P(X_3) = 0{,}1 \times 0{,}2 \times 0{,}25 = 0{,}005$$

б) X_2 - две детали вышли из строя:

$$P(X_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) + P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot p_3$$

$$P(X_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot (1 - 0{,}25) + 0{,}1 \cdot (1 - 0{,}2) \cdot 0{,}25 + (1 - 0{,}1) \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}08$$

в) W – хотя бы одна деталь вышла из строя

$$P(W) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$$

$$P(W) = 1 - (1-0{,}1)\times(1-0{,}2)\times(1-0{,}25) = 0{,}46$$

г) Z – от одной до двух деталей вышло из строя

X_1 – одна деталь вышла из строя

$$P(X_1) = P(A_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P\cdot(\bar{A}_3) +$$
$$+ P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(A_3) =$$
$$= p_1 \cdot q_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3$$

$$P(X_1) = 0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}75 + 0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}75 + 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}25 = 0{,}375$$

$$P(Z) = P(X_1) + P(X_2) = 0{,}375 + 0{,}08 = 0{,}455$$