

# Wykłady z Optyki Nieliniowej

10 czerwca 2005



# Spis treści

<b>1</b>	<b>Izotropowe ośrodki dyspersyjne.</b>	<b>5</b>
1.1	Równania Maxwella . . . . .	5
1.2	Dyspersja . . . . .	6
1.3	Dyspersja a absorpcja. . . . .	8
1.4	Model współczynnika załamania. . . . .	9
1.5	Związek dyspersyjny. . . . .	11
1.6	Jednowymiarowy przykład propagacji. . . . .	14
<b>2</b>	<b>Liniowa propagacja w ośrodkach anizotropowych.</b>	<b>17</b>
2.1	Związek dyspersyjny . . . . .	17
2.2	Liniowe równanie propagacji w ośrodku jednoosiowym. . . . .	19
2.2.1	Rozwiązanie równania pierwszego rzędu . . . . .	22
2.2.2	Rozwiązanie równania drugiego rzędu . . . . .	22
2.2.3	Rozwiązanie równania trzeciego rzędu . . . . .	22
2.3	Eksperyment . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Nieliniowa podatność dielektryczna.</b>	
	<b>Model Lorentza.</b>	<b>25</b>
3.1	Ośrodki optyczne bez środka inwersji. . . . .	25
3.2	Ośrodki centrosymetryczne. . . . .	28
3.3	Własności tensora dielektrycznego . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Procesy trzeciego rzędu</b>	<b>33</b>
4.1	Zmiana przenikalności elektrycznej i współczynnika załamania pod wpływem pola elektrycznego fali świetlnej. . . . .	33
4.2	Samoistna modulacja fazy (SPM) . . . . .	35
4.3	Nieliniowe równanie Schrodingera i solitony optyczne. . . . .	38
4.4	Samoistne wyostrzanie się impulsów i samoistne przesunięcie częstości. . . . .	39
4.5	Samoogniskowanie i autokolimacja . . . . .	41
4.6	Metody numerycznego rozwiązywania równania propagacji. Metoda split-step. . . . .	45
<b>5</b>	<b>Procesy drugiego rzędu</b>	<b>47</b>
5.1	Sprzężone równania propagacji . . . . .	47
5.2	Generacja sumy częstości . . . . .	48
5.3	Generacja różnicy częstości . . . . .	51

5.4	Generacja drugiej harmonicznej . . . . .	52
5.5	Dopasowanie fazowe . . . . .	54
5.6	Nieliniowa optyka impulsów Gaussowskich . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Oddziaływania rezonansowe.</b>	<b>57</b>
6.1	Częstości rezonansowe . . . . .	57
6.2	Równania Blocha . . . . .	57
6.3	Transformacja do obracającego się układu. Przybliżenie wirującej fali. . .	60
6.4	Zachowanie wektora Blocha bez pola . . . . .	61
6.5	Zachowanie wektora Blocha w polu fali płaskiej . . . . .	62
6.6	Nadpromienistość . . . . .	63
6.7	Samo-indukowana przeźroczystość . . . . .	64
<b>7</b>	<b>Procesy parametryczne</b>	<b>71</b>
7.1	Równania opisujące wzmocnienie parametryczne . . . . .	71
7.2	Oscylacje parametryczne . . . . .	72
7.2.1	Podwójny rezonans parametryczny . . . . .	73
7.2.2	Pojedynczy rezonans parametryczny . . . . .	73
7.3	Strojenie częstości w procesach parametrycznych . . . . .	74
7.4	Parametryczne podwyższanie częstości . . . . .	75
7.5	Klasyfikacja procesów parametrycznych . . . . .	77

# Rozdział 1

## Izotropowe ośrodki dyspersyjne.

*Celem tego wykładu jest wprowadzenie podstawowych pojęć, w tym pojęcia dyspersji, prędkości grupowej, dyspersji prędkości grupowej oraz badanie propagacji impulsów świetlnych w jednowymiarowych ośrodkach dyspersyjnych.*

### 1.1 Równania Maxwella

W 1860 roku Maxwell sformułował jednolitą teorię, która opisywała jednocześnie pola elektryczne i magnetyczne. Zapostulowanie równań na natężenie pól: elektrycznego ( $E$ ) oraz magnetycznego ( $H$ ), oraz na indukcję: dielektryczną ( $D$ ) oraz magnetyczną ( $B$ ), dało podstawy do analizy propagacji impulsów świetlnych w ośrodkach optycznych. Wyżej wspomniane równania, to

$$(Gaussa) \quad \nabla \vec{D} = \rho, \quad (1.1)$$

$$(Faraday'a) \quad \nabla \vec{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$(Ampere'a) \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\text{oraz} \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}. \quad (1.4)$$

W równaniach tych  $\rho$  i  $j$  oznaczają odpowiednio gęstość ładunków oraz gęstość prądu elektrycznego. Wielkości te są ze sobą powiązane poprzez równanie ciągłości, które mówi że zmiana ładunku w pewnej objętości jest równa przepływowi prądu przez powierzchnię ograniczającą tę objętość. Równanie to ma postać:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.5)$$

To, że jest to równanie ciągłości staje się jasne, gdy scałkujemy je stronami po pewnej objętości i skorzystamy z twierdzenia Gaussa o zamianie całki objętościowej na powierzchnię. Dostajemy wtedy czytelne równanie:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{j} \cdot \vec{n} d^2x + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d^3x = 0, \quad (1.6)$$

gdzie  $\vec{n}$  jest wektorem normalnym do powierzchni  $\partial\Omega$ . W ramach tego wykładu będziemy prawie wyłącznie mieć do czynienia z ośrodkami dielektrycznymi, w których nie ma

swobodnych ładunków ani nie płyną prądy. Zakładamy także, że rozpatrujemy wyłącznie ośrodki niemagnetyczne ( $\mu = 1$ ). Poza tym, na razie, nie będziemy wnikać w ich strukturę wewnętrzną i zastosujemy fenomenologiczny opis wprowadzony przez Maxwella. W ramach tego opisu natężenia pól są związane z indukcyjnościami poprzez związki materiałowe:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (1.7)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \quad (1.8)$$

gdzie  $\mu_0$  i  $\varepsilon_0$  są odpowiednio magnetyczną oraz dielektryczną przenikalnością próżni, a  $\varepsilon$  jest względną przenikalnością dielektryczną ośrodka. W tym rozdziale ograniczymy się do przypadku ośrodków izotropowych, dla których  $\mu_0$ ,  $\varepsilon_0$  są wielkościami skalarnymi. Równoważny, a nawet bardziej intuicyjny sposób opisu pól elektromagnetycznych w ośrodkach dielektrycznych otrzymujemy wprowadzając pojęcie polaryzacji ośrodka, jako odpowiedzi na zaburzenie spowodowane obecnością zewnętrznego pola. Wówczas równanie (8) możemy przepisać w następującej postaci:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} \quad (1.9)$$

gdzie  $P$  jest polaryzacją ośrodka, a  $\chi$  podatnością dielektryczną pierwszego rzędu. Sens równania (9) jest następujący. Całkowite pole elektryczne w ośrodku jest sumą pola zewnętrznego oraz pola wynikającego z polaryzacji ośrodka, czyli przesunięcia ładunków elektrycznych. Ten sposób opisu jest szczególnie wygodny, ponieważ pozwala na uogólnienie na przypadek ośrodków nieliniowych, a jednocześnie pozwoli nam na przedstawienie prostej, intuicyjnej interpretacji w ramach tzw. modelu Lorentza.

wstawić rysunek Butcher strona 2

## 1.2 Dyspersja

W optyce dyspersję ośrodka rozumiemy jako zjawisko powodujące, że rozchodzenia się w ośrodku fale płaskie o różnych częstościach rozchodzą się z różnymi prędkościami. Konsekwencją tego zjawiska jest zmiana kształtu (oraz czasu trwania) impuls świetlnego podczas propagacji w ośrodku liniowym. Fale płaskie o różnych częstościach wchodzące w skład impulsu docierają do końca ośrodka z różnym opóźnieniem, powodując jego rozciąganie w czasie. Schematycznie przedstawiono tę sytuację na rysunku poniżej.

Pokażemy teraz, że przyczyną powstawania dyspersji jest skończony czas oddziaływania oraz nielokalność. Jak już wspomnieliśmy, dla uproszczenia będziemy mówić o ośrodkach izotropowych i nie będziemy uwzględniać tensorowego charakteru  $\varepsilon$  oraz  $\chi$  (w ośrodku izotropowym są one tensorami proporcjonalnymi do tensora jednostkowego). Zgodnie z równaniem (9)  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ . Pokażemy, że jest to przybliżenie, które można poddać poważnej krytyce. Potraktujmy  $\vec{E}$  jako 'zewnętrzne' zaburzenie, które indukuje w naszym ośrodku polaryzację  $\vec{P}$ . W każdym rzeczywistym ośrodku fizycznym musi upłynąć pewien czas, zanim powstanie makroskopowa polaryzacja. Innymi słowy, ośrodek reaguje na zaburzenie z pewnym opóźnieniem. Równocześnie polaryzacja może w ośrodku pozostać jeszcze przez pewien czas po tym, jak zewnętrzne pole zniknie. A zatem polaryzacja  $\vec{P}$  pojawiająca się w chwili czasu  $t$  jest efektem działania pola elektrycznego w

pewnym skończonym czasie poprzedzającym chwilę  $t$ . Budowanie makroskopowej polaryzacji odbywa się w ciągu czasu  $\tau$ , który jest wielkością charakterystyczną dla danego ośrodka. Równanie (9) zmodyfikowano tak, by uwzględnić skończony czas odpowiedzi ośrodka. Dostajemy wtedy:

$$P_i(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \varepsilon_0 \chi(t' - t) E_i(\vec{r}, t') \quad (1.10)$$

a funkcja  $\chi(t' - t)$  jest różna od zera dla  $t' - t$  w zakresie czasów rzędu  $\tau$ . Polaryzacja ośrodka w chwili czasu  $t$  jest konsekwencją występowania pola elektrycznego  $\vec{E}$  w czasie poprzedzającym tę chwilę, nie zależy natomiast od czasów późniejszych niż  $t$ , stąd całka rozciąga się tylko do  $t$ . Ten bardzo prosty i oczywisty fakt, jak się za chwilę przekonamy, ma poważne konsekwencje. Zanim do nich przejdziemy uczynimy dwie bardzo proste uwagi. Zauważmy po pierwsze, że jeśli pole elektryczne zmienia się powoli w skali czasu rzędu  $\tau$ , to wektor natężenia możemy wyłączyć spod całki i otrzymamy nasze pierwotne równanie  $P_i(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \varepsilon_0 \chi(t' - t) E_i(\vec{r}, t') = \varepsilon_0 \chi E_i(\vec{r}, t)$ . Warto raz jeszcze podkreślić, że to równanie jest prawdziwe tylko w przypadku wolnozmiennych pól, w tak zwanym reżimie quasi-statycznym. Druga uwaga dotyczy zależności tensora dielektrycznego od zmiennych przestrzennych. W rzeczywistych ośrodkach polaryzacja w punkcie  $r$  zależy nie tylko od natężenia pola elektrycznego w tym jedynie punkcie. Powiedzielibyśmy, że ta zależność nie jest lokalna, przez co rozumiemy, że pole elektryczne w danym punkcie wpływa na stan sąsiednich atomów-dipoli, które przecież oddziałują z atomem znajdującym się w punkcie  $r$ . Na przykład, jeśli nasz ośrodek ma strukturę krystaliczną, poszczególne atomy oddziałują poprzez wiązania chemiczne ze swoimi sąsiadami. Odpowiedź ośrodka na zewnętrzne pole elektryczne jest zatem związana nie tylko ze skończonym czasem reakcji, ale także ma skończony zasięg. W większości przykładów omawianych w poniższym kursie zasięg ten jest jednak o wiele mniejszy niż charakterystyczna skala przestrzennej zmienności pól elektrycznych, wyznaczona przez długość fali świetlnej, rzędu kilkuset nanometrów. Wynika stąd, jak się za chwilę przekonamy, że w przestrzeni Fouriera możemy zaniedbać zależność przenikalności dielektrycznej oraz podatności dielektrycznej od wektora falowego. Jeśli ośrodek optyczny jest jednorodny, możemy wyrazić wyżej omawianą retardację i nielokalność odpowiedzi ośrodka na pole elektryczne równaniem:

$$P_i(\vec{r}, t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^t dt' \varepsilon_0 \chi(\vec{r} - \vec{r}', t - t') E_i(\vec{r}', t') \quad (1.11)$$

W trakcie tego wykładu będziemy często posługiwali się transformatą Fouriera, aby wyrazić wielkości takie jak pole elektryczne czy moment dipolowy w przestrzeni częstotliwości oraz wektorów falowych. Na przykład transformatę Fouriera natężenia pola elektrycznego możemy zapisać jako

$$E_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int d^3k d\omega E_i(\vec{k}, \omega) \cdot \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) \quad (1.12)$$

Ten wzór można rozumieć jako rozkład pola elektrycznego na monochromatyczne fale płaskie, każda o określonej częstotliwości oraz wektorze falowym  $\vec{k}$ . Jak się przekonamy w trakcie tego wykładu wiele parametrów fizycznych opisujących ośrodki optyczne znacznie łatwiej wyznaczyć badając odpowiedź ośrodka w przypadku gdy zaburzenie zewnętrzne

jest właśnie falą płaską. Staje to się szczególnie istotne w przypadku nieliniowym, gdy polaryzacja staje się funkcją pola elektrycznego. Jednak nawet w przypadku liniowym, dyskutowanym na tym wykładzie, ze względu na wspomniane efekty nielokalności i retardacji związki pomiędzy polami elektrycznymi i polaryzacją są prostsze w przestrzeni Fouriera niż w przestrzeni konfiguracyjnej, a mianowicie:

$$P_i(\vec{k}, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\vec{k}, \omega) E_i(\vec{k}, \omega) = \varepsilon_0 (\varepsilon(\vec{k}, \omega) - 1) E_i(\vec{k}, \omega), \quad (1.13)$$

jako że transformata Fouriera splotu funkcji jest iloczynem transformat tych funkcji. Z tej ostatniej relacji widać także, że stała dielektryczna, a co za tym idzie współczynnik załamania w ośrodku optycznym zależy w ogólnym przypadku od wektora falowego oraz od częstości. Jak już wspomnieliśmy, w większości zastosowań, zależności tych parametrów od wektora falowego nie będziemy brali pod uwagę, jednak musimy pamiętać o tym że na początku tego wykładu założyliśmy izotropowość ośrodka (tylko na potrzeby tego wykładu, w następnych wykładach to ograniczenie usuniemy) i pominęliśmy tensorowy charakter  $\varepsilon$ . W ośrodkach, w których takiego przybliżenia nie można uczynić (kryształy dwójłomne - jedno i dwuosiowe), współczynniki te efektywnie zależą będą od kierunku rozchodzenia się fali. Opisowi takich ośrodków poświęcimy część następnego wykładu. Zależność tensora dielektrycznego od częstości pobudzającej ośrodek fali elektromagnetycznej ma zasadnicze znaczenie z punktu widzenia tego wykładu. Na ośrodek optyczny składają się atomy i cząsteczki, a te mają zawsze swoje częstości rezonansowe. W przypadku atomów w ośrodkach gazowych częstości rezonansowe  $\omega_{nm}$  wiążą się z wartościami energii kwantowych stanów własnych  $\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}$ , gdzie  $E_n$  i  $E_m$  oznaczają energie stanów własnych atomów gazu, i znajdują się zwykle w widzialnej lub ultra-fioletowej części widma. W przypadku cząsteczek mamy jeszcze dodatkowe częstości związane z przejściami rotacyjnymi i oscylacyjnymi - te ostatnie odpowiadają częstościom z zakresu podczerwieni. W przypadku ośrodków skondensowanych, takim jak ciecze czy ciała stałe, mamy do czynienia z całymi pasmami energii (częstości) które leżą z grubsza w tej samej części widma. W tej sytuacji musimy uwzględnić dyspersyjność ośrodka i, jak się przekonamy, ma to kluczowe znaczenie dla naszych dalszych rozważań.

### 1.3 Dyspersja a absorpcja.

W pierwszej części wykładu określiliśmy związek pomiędzy wektorem natężenia pola elektrycznego oraz indukcją dielektryczną:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \varepsilon_0 \varepsilon(t - t') \vec{E}(\vec{r}, t') \quad (1.14)$$

gdzie  $\varepsilon$  został zdefiniowany poprzez:  $\varepsilon(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega\tau) \varepsilon(\omega)$ , a zgodnie z zasadą przyczynowości  $\varepsilon(\tau) = 0$  dla  $\tau \geq 0$ . Ponieważ pola  $D$  oraz  $E$  są wielkościami rzeczywistymi, zatem również  $\varepsilon(\tau)$  musi być wielkością rzeczywistą. Nie odnosi się to jednak do  $\varepsilon(\omega)$ , które jest na ogół wielkością zespoloną. Jej części: rzeczywista i urojona, mają prostą interpretację fizyczną. Aby to pokazać, zapiszmy:  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_d(\omega) + i\varepsilon_a(\omega)$ , definiując w ten sposób dwie rzeczywiste funkcje. Załóżmy, że na nasz ośrodek pada monochromatyczna fala płaska o wektorze natężenia pola elektrycznego:  $\vec{E}(\vec{r}, t) =$



$\vec{E}(\vec{r}) \exp(-i\omega t) + \vec{E}^*(\vec{r}) \exp(i\omega t)$ . Zgodnie z definicją wektora indukcji dielektrycznej:  $\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0[\varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r}) \exp(-i\omega t) + \varepsilon^*(\omega)\vec{E}^*(\vec{r}) \exp(i\omega t)]$ . Obie te definicje posłużą nam w dalszym ciągu do policzenia jaka część energii (na jednostkę objętości) przechodzi z rozchodzącej się fali elektromagnetycznej do ośrodka, w którym ta fala się propaguje. Energia na jednostkę objętości (oznaczymy ją  $U_E$ ) jaka jest zgromadzona w polu elektrycznym rozchodzącej się fali jest dana równaniem  $\frac{\partial}{\partial t} U_E = \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E}$ . Jeśli do ostatniego wzoru podstawimy wyrażenia na  $D$  oraz  $E$  znalezione powyżej i całość uśrednimy po czasie, wówczas otrzymamy:  $\frac{\partial}{\partial t} U_E = \omega \varepsilon_0 \varepsilon_a(\omega) |\vec{E}|^2$ . Otrzymaliśmy w ten sposób równanie na szybkość dyssypacji energii, która znajdowała się w polu elektrycznym i została zaabsorbowana przez ośrodek i dowiedliśmy, że urojona część podatności dielektrycznej jest proporcjonalna do współczynnika absorpcji.

**Związki Kramersa - Kroniga** Zgodnie z fundamentalnym twierdzeniem teorii funkcji zmiennej zespolonej, części rzeczywista i urojona funkcji zespolonej  $f(z)$ , która nie ma biegunów w górnej (dolnej) półpłaszczyźnie zespolonej, są związane poprzez transformację Hilberta. W zastosowaniu do przypadku zespolonej podatności  $\chi^{(1)}(\omega) = \chi_r(\omega) + i\chi_i(\omega)$ :

$$\chi_r(\omega) = \frac{1}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi_i(\omega')}{\omega - \omega'} \quad (1.15)$$

$$\chi_i(\omega) = -\frac{1}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi_r(\omega')}{\omega - \omega'}, \quad (1.16)$$

gdzie  $\wp \int$  oznacza obliczanie części głównej całki. Związki te noszą nazwę relacji Kramersa-Kroniga. Wynika stąd ciekawa obserwacja. W zasadzie nie musimy wykonywać pomiaru całej funkcji  $\varepsilon(\omega)$ . W zupełności wystarczy znajomość jej rzeczywistej bądź urojonej części by korzystając z relacji Kramersa-Kroniga wyznaczyć pozostałą.

## 1.4 Model współczynnika załamania.

Wprowadzimy teraz model ośrodka, zwany często modelem Lorentza, od nazwiska jego twórcy. Dotychczas ośrodek optyczny traktowaliśmy jako ośrodek ciągły, opisując go przez podanie fenomenologicznych współczynników  $\varepsilon$  oraz  $\chi$ . Jeśli chcemy bardziej szczegółowo zbadać własności ośrodka materialnego, to musimy wniknąć w jego mikrostrukturę. W ramach modelu Lorentza atomy ośrodka zastępujemy oscylatorami harmonicznymi. Uzasadnienie takiego wyboru leży w tym że z punktu widzenia potrzeb tego wykładu, atomy można podzielić na jądro wraz z bliżej związanymi elektronami oraz elektrony walencyjne. Zewnętrzne pole elektromagnetyczne będzie wpływało prawie wyłącznie na ruch elektronów walencyjnych, ponieważ mają one znacznie mniejszą bezwładność niż jądro atomu. Układ jądro-elektrony walencyjne tworzy w przybliżeniu dipol elektryczny, drgający wokół położenia równowagi. Pobudzany falą elektromagnetyczną drga on z częstością fali pobudzającej, a same drgania są przesunięte w fazie w stosunku do drgań pola pobudzającego. Oscylujący dipol elementarny ośrodka pochłania część energii fali elektromagnetycznej, którą zwraca z pewnym opóźnieniem fazowym. Oscylujący dipol promieniuje przeciw falę elektromagnetyczną. Dopóty, dopóki rozmiary elementarnych dipoli są małe w porównaniu z długością fali pobudzającej,

zaburzenie, które teraz składa się z zaburzenia pierwotnego oraz 'odpowiedzi' dipoli ośrodka, rozprzestrzenia się nadal w kierunku pierwotnym, a przesunięcie fazowe drgań dipoli ośrodka powoduje spowolnienie lub przyspieszenie rozprzestrzeniania się tego zaburzenia. Wypadkowa prędkość fazowa fali elektromagnetycznej jest więc różna od prędkości fali w próżni. W przypadku absorpcji część energii fali elektromagnetycznej może zostać bezpowrotnie przekazana do ośrodka materialnego, wzbudzając na przykład drgania mechaniczne sieci. Urok omawianego modelu leży w tym, że daje się on uogólnić na przypadek nieliniowy i pozwala budować intuicję co do natury procesów nieliniowych. Rozważamy przestrzeń wypełnioną oscylatorami tłumionymi o częstotliwości rezonansowej  $\omega_0$  i współczynnikiem tłumienia  $\gamma$ . Ich gęstość przyjmujemy równą  $N$  (w jednostce objętości ośrodka znajduje się  $N$  atomów - oscylatorów). Mają one masę  $m$ , ładunek  $q$  i są poruszane przez oscylujące pole elektryczne  $E$ . Równanie ruchu każdego z nich ma postać:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} + \omega_0^2 \vec{x} = \frac{q}{m} \vec{E} \exp(i\omega t) \quad (1.17)$$

Skończony czas odpowiedzi ośrodka o którym mówiliśmy w poprzednim paragrafie jest tu reprezentowany przez współczynnik  $\gamma$ . Założmy rozwiązanie postaci  $\vec{x} = \vec{x}_0 \exp(i\omega t)$  i wstawmy je do (18). Otrzymamy wówczas:

$$(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) \vec{x}_0 = \frac{q}{m} \vec{E} \quad (1.18)$$

co pozwala wyznaczyć amplitudę drgań:

$$\vec{x}_0 = \frac{q}{m(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)} \vec{E} \quad (1.19)$$

W ośrodku zawierającym  $N$  takich oscylatorów na jednostkę objętości powstaje makroskopowy wektor polaryzacji  $\vec{P} = Nq\vec{x}_0$ . Wektor polaryzacji można również przedstawić jako:

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}, \quad (1.20)$$

gdzie  $\varepsilon$  oznacza podatność elektryczną ośrodka. Ponieważ rozważania prowadzimy dla fali elektromagnetycznej o częstości zbliżonej do częstości optycznej ( $\omega > 10^{12} \text{ Hz}$ ), więc (???) przenikalność magnetyczna ośrodków jest zbliżona do jedności ( $\mu = 1$ ). Jak wykażemy poniżej, z postaci równania falowego wynika, że prędkość fali elektromagnetycznej wynosi  $\frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}}$ , gdzie  $n$  oznacza współczynnik załamania ośrodka. W rezultacie  $n = \sqrt{\varepsilon}$ . Oznaczając  $x_0 = |\vec{x}_0|$  i łącząc równania (20) i (21) dostajemy:

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \frac{Nqx_0}{\varepsilon_0 E} = 1 + \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)} \quad (1.21)$$

Rozkładamy następnie współczynnik załamania na część rzeczywistą i urojoną:  $n = n' - i\kappa$ .

**Zadanie 1** Sprawdź, że  $\kappa$  oraz  $n'$  spełniają relacje Kramersa-Kroniga:

$$\kappa = \frac{Nq^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (1.22)$$

$$n' = 1 + \frac{Nq^2}{2\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (1.23)$$

Monochromatyczna fala płaska  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - kz)]$  rozchodząca się w ośrodku o współczynniku załamania  $n$  ma tę samą częstotliwość co w próżni, lecz inny wektor falowy:  $k_n = nk$ . Podstawiając zespolony współczynnik załamania otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - k_n z)] = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - k'_n z + i\kappa z)] = \\ &= \vec{E}_0 \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda}\kappa z\right) \exp[i(\omega t - k'_n z)]\end{aligned}\quad (1.24)$$

Równanie to opisuje tłumioną falę elektromagnetyczną. Część urojona współczynnika załamania  $\kappa$  charakteryzuje absorpcję ośrodka. Część rzeczywista opisuje zmianę wektora falowego czynnika oscylującego fali elektromagnetycznej, a więc rzeczywisty współczynnik załamania. Jeżeli przez ośrodek fala propaguje się bez absorpcji, to  $n = n'$ . Zależność współczynnika absorpcji i współczynnika załamania w funkcji częstotliwości rezonansowej przedstawiono na Rysunku 1.

Wielkość  $\frac{dn'}{d\omega}$  nazywana jest dyspersją ośrodka. Jak widać z Rysunku 1 poza rezonansem jest ona wielkością dodatnią - mówimy wtedy o dyspersji normalnej. Jednak dla częstotliwości bliskich częstotliwości rezonansowej  $\frac{dn'}{d\omega}$  może być ujemna i w tym zakresie nazywamy ją dyspersją anomalną. Natężenie światła jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy pola elektromagnetycznego. Podnosząc więc do kwadratu funkcję opisującego wykładniczy zanik pola w ośrodku otrzymujemy prawo Lamberta - Beera opisujące liniową absorpcję fali przy przechodzeniu przez ośrodek:  $I(z) = I_0 e^{-\lambda z}$  gdzie współczynnik wykładniczego zaniku natężenia (tzw. absorbancja) dany jest wzorem:  $\lambda = 2\kappa k_0$ .

Zazwyczaj w danej substancji mamy do czynienia z kilkoma zjawiskami rezonansowymi mającymi różne częstotliwości  $\omega_{0i}$ . Jak pokazano na rysunku ? dla niskich częstotliwości część rzeczywista przenikalności dielektrycznej jest wypadkową wszystkich zjawisk. W miarę zwiększania się częstotliwości pola elektrycznego i przechodzenia przez kolejne rezonanse, wkład poszczególnych zjawisk do przenikalności dielektrycznej 'opada'. Można to zrozumieć, jeśli zauważymy, że w przypadku, gdy częstotliwość fali jest dużo większa niż dana częstotliwość rezonansowa, to ośrodek nie nadąża za oscylacjami pola elektrycznego fali. Zatem w ośrodku nie powstaje polaryzacja, która odpowiada za wzrost współczynnika załamania. Możemy to zjawisko prześledzić dla wody, dla której wartość stałej dielektrycznej w niskich częstotliwościach  $\varepsilon = 81$  nie zmienia się praktycznie aż do częstotliwości około  $10GHz$  (rys. ?). Gdy częstotliwość pola przekroczy rezonans odpowiadający oscylacjom jąder i oscylacjom chmury elektronowej, przenikalność dielektryczna spada do wartości  $\varepsilon \simeq 1.76$ , dając dobrze znany współczynnik załamania dla częstotliwości optycznych  $n \simeq 1.33$ .

## 1.5 Związek dyspersyjny.

Pokażemy teraz w jaki sposób można korzystając z równań Maxwella oraz związków materiałowych wyprowadzić równanie falowe, czyli równanie propagacji światła w ośrodku

optycznym. Skorzystamy w tym celu z równań (3) i (4). Związki materiałowe to równania wiążące wektory indukcji dielektrycznej  $\vec{D}$  i magnetycznej  $\vec{B}$  z wektorami natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  i  $\vec{H}$  magnetycznego oraz polaryzacją  $\vec{P}$  i magnetyzacją  $\vec{M}$  ośrodka (równania 7 i 9). Jeśli obliczymy rotację równania (3) i po prawej stronie podstawimy równanie (4) pomnożone przez  $\mu_0$ , to otrzymamy:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} = -\mu_0 \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \quad (1.25)$$

Lewą stronę tego równania możemy jeszcze przekształcić korzystając ze wzoru na podwójną rotację:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} \quad (1.26)$$

Równania (26) i (27) posłużą nam teraz do wyprowadzenia tzw. związku dyspersyjnego. Pokażemy mianowicie, że rozwiązaniem równania (?) są fale płaskie postaci:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)) \quad (1.27)$$

o ile tylko zachodzi odpowiedni związek pomiędzy wektorem falowym  $\vec{k}$  oraz częstością kołową  $\omega$ . Rzeczywiście, podstawiając (28) do (26) otrzymujemy:

$$(\vec{k} \cdot \vec{k}) \vec{E} - \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \hat{\varepsilon} \vec{E} = 0 \quad (1.28)$$

Ostatni związek jest w istocie jednorodnym układem równań liniowych na wektor natężenia pola elektrycznego i posiada niezerowe rozwiązania jedynie gdy znika wyznacznik równania. Ten warunek na znikanie wyznacznika wyraża właśnie związek dyspersyjny. Związek ten zawiera informację o ośrodku optycznym poprzez tensor dielektryczny  $\hat{\varepsilon}$ . Jego postać będziemy analizować szczegółowo na następnym wykładzie. Na razie ograniczymy się tylko do ośrodków izotropowych, dla których łatwo dostać rozwiązania. Tensor dielektryczny w ośrodku izotropowym jest proporcjonalny do tensora jednostkowego, a rozwiązania w postaci fal płaskich mają tę własność, że wektor natężenia pola elektrycznego jest prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali, czyli do wektora falowego  $\vec{k}$ . Oznacza to, że  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$  i równania (26) oraz (27) redukują się do:

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \left( \frac{n(\omega)}{c} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \quad (1.29)$$

Z równania (30) wynikają dwa bardzo ważne wnioski dla dyspersyjnych ośrodków izotropowych. Po pierwsze zdefiniowaliśmy współczynnik załamania ośrodka poprzez równanie:  $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ . Prędkość fazowa rozchodzenia się fali płaskiej w takim ośrodku jest równa  $\frac{c}{n(\omega)}$  i jak widać zależy jawnie od częstości fali. Po drugie, podstawiając rozwiązanie w postaci fali płaskiej o częstości kołowej  $\omega$  dostajemy związek dyspersyjny w postaci  $k(\omega) = \frac{n(\omega)\omega}{c}$ . W ten sposób zdefiniowaliśmy dwie pierwsze wielkości charakteryzujące propagację fal: współczynnik załamania oraz wektor falowy (patrz także poprzedni paragraf tego wykładu).

**Zasada d'Alamberta.** Pokażemy teraz, że w przypadku liniowej propagacji impulsów (dla uproszczenia rozważamy przypadek jednowymiarowy) dowolną falę (paczke falową) możemy

zawsze rozłożyć na niezależnie biegnące dwie fale poruszające się w przeciwnych kierunkach. Pozwoli nam to w dalszej części wykładu rozważać tylko propagację w kierunku centralnego wektora falowego. Rozważmy równanie falowe:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

Warunki początkowe określone są przez równania:

$$\begin{aligned}\Psi(x, t=0) &= f(x) \\ \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t=0) &= g(x)\end{aligned}$$

Wprowadźmy nowe zmienne:

$$\begin{aligned}\xi &= x + vt \\ \eta &= x - vt\end{aligned}$$

Wówczas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial t} &= v \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -v\end{aligned}$$

Policzmy teraz pochodne w nowych zmiennych:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= v^2 \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)\end{aligned}$$

Analogicznie:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)$$

Równanie falowe sprowadza się do :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Najogólniejsze rozwiązanie tego równania jest postaci:

$$\Psi(\xi, \eta) = \Psi_1(\xi) + \Psi_2(\eta) = \Psi_1(x + vt) + \Psi_2(x - vt)$$

Wykorzystując warunki początkowe otrzymujemy:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + vt) + f(x - vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(s) ds$$

W ostatnim paragrafie tego wykładu pokażemy jak z równania falowego, przy zadanych warunkach początkowych na granicy ośrodka optycznego, można otrzymać równanie propagacji impulsów poruszających się 'w głąb' ośrodka.

## 1.6 Jednowymiarowy przykład propagacji.

W tej części wykładu znajdziemy równanie propagacji dla wolno zmiennej obwiedni impulsów światła rozchodzących się w ośrodku posiadającym dyspersję. Dla uproszczenia rozważymy na razie przypadek jednowymiarowy, to znaczy założymy, że w obu kierunkach prostopadłych do kierunku propagacji (będziemy je oznaczać  $x$  i  $y$ ) paczka falowa jest jednorodna, a obwiednia zmienia się tylko jako funkcja czasu i zmiennej  $z$ . To równanie jest również używane do opisu propagacji paczek falowych w światłowodach, gdzie pola nie są jednorodne w kierunkach  $x$  i  $y$ , ale funkcyjna zależność obwiedni od wszystkich zmiennych daje się zapisać jako iloczyn funkcji w kierunku  $x$  i  $y$  pomnożonej przez obwiednię w funkcji  $z$  i  $t$ . Podejście prezentowane przez nas jest analogiczne do przybliżenia wolno zmiennej obwiedni (SVEA), jest jednak bardziej eleganckie matematycznie i pozwala na uogólnienie przybliżenia SVEA uwzględniające wyższe rzędy rachunku zaburzeń, istotne szczególnie dla ultra-krótkich impulsów oraz wtedy gdy dyspersja prędkości grupowej dla centralnej częstości impulsu jest równa zero. Posłużymy się poniższym przykładem także w tym celu, aby zdefiniować podstawowe terminy fizyczne używane przy opisie propagacji: prędkości grupowej, dyspersji prędkości grupowej oraz dyspersji trzeciego rzędu. Parametry przestrzenne, takie jak dyfrakcja, wprowadzimy w następnym wykładzie. Założmy na wstępie, że wektor natężenia pola elektrycznego można zapisać jako iloczyn szybko-zmiennego czynnika fazowego zawierającego centralną częstość oraz centralny wektor falowy oraz zmieniającej się znacznie wolniej obwiedni:  $E(z, t) = A(z, t) \exp(i(\frac{n(\omega_0)\omega_0}{c}z - \omega_0 t))$ . W równaniu tym wykorzystaliśmy związek dyspersyjny dla centralnej częstości i centralnego wektora falowego. Podobnie wykorzystując związek dyspersyjny dla innych częstości i wektorów falowych możemy zapisać dowolną paczkę falową stanowiącą rozwiązanie równań Maxwella jako sumę fal płaskich, czyli innymi słowy napisać wektor natężenia w tej paczce w postaci transformaty Fouriera:

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega E(\omega) \exp \left[ i \left( \frac{n(\omega)\omega}{c} z - \omega t \right) \right] \quad (1.30)$$

a co za tym idzie również obwiednię impulsu można zapisać jako:

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega E(\omega) \exp \left[ i \left( \frac{n(\omega)\omega - n(\omega_0)\omega_0}{c} z - (\omega - \omega_0)t \right) \right] \quad (1.31)$$

Aby otrzymać równanie ruchu takiej paczki falowej wystarczy policzyć pochodną obwiedni w kierunku propagacji (przypominamy, że paczka ta jest rozwiązaniem równań Maxwella w ośrodku dyspersyjnym, ponieważ stanowi superpozycję fal płaskich będących rozwiązaniami równań Maxwella w tym ośrodku):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} A(z, t) &= \frac{i}{2\pi c} \int d\omega E(\omega) (n(\omega)\omega - n(\omega_0)\omega_0) \times \\ &\times \exp \left[ i \left( \frac{n(\omega)\omega - n(\omega_0)\omega_0}{c} z - (\omega - \omega_0)t \right) \right] \end{aligned} \quad (1.32)$$

Prawą stronę tego równania można przekształcić, jeśli zauważymy że funkcja  $E(\omega)$  ma wąskie maksimum wokół częstości centralnej  $\omega_0$ ; możemy zatem wielkość  $[n(\omega)\omega - n(\omega_0)\omega_0]$

występującą pod całką rozwinąć w szereg Taylora wokół tej wartości:  $[n(\omega)\omega - n(\omega_0)\omega_0] = \beta_1(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \beta_2(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2 + \beta_3(\omega_0)(\omega - \omega_0)^3 + \dots$  gdzie wielkości  $\beta_l$  zostały zdefiniowane poprzez relację:  $\beta_l = \frac{d\beta_{l-1}}{d\omega} = \frac{d^l\beta_0}{d\omega^l}$  dla  $l > 0$  oraz warunek  $\beta_0 = \frac{\omega n}{c}$ . Zauważmy, że rozwinięcie powyższe nie zawiera wyrazu zerowego. Po dokonaniu powyższego rozwinięcia i po zauważeniu że potęgi wielomianu  $(\omega - \omega_0)$  pod transformatą Fouriera można otrzymać poprzez (wielokrotne) różniczkowanie transformaty po czasie (symbolicznie można napisać  $(\omega - \omega_0)^n \equiv i^n \frac{\partial^n}{\partial t^n}$  otrzymujemy zamknięte cząstkowe równanie różniczkowe na obwiednię impulsu:

$$\frac{\partial}{\partial z} A(z, t) = \left( -\beta_1 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \dots \right) A(z, t) \quad (1.33)$$

Współczynniki występujące w tym równaniu mają prostą interpretację fizyczną. Aby zrozumieć sens fizyczny  $\beta_1$  ograniczymy nasze rozwinięcie w szereg Taylora do wyrazu pierwszego rzędu. Wówczas równanie propagacji redukuje się do:

$$\frac{\partial}{\partial z} A(z, t) + \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} A(z, t) = 0 \quad (1.34)$$

Łatwo pokazać, że równanie to opisuje jednostajny ruch obwiedni impulsu, bez zmiany kształtu z prędkością równą  $\frac{1}{\beta_1}$ , a tę właśnie prędkość nazywamy prędkością grupową. Natomiast gdy dodamy jeszcze drugi wyraz rozwinięcia Taylora, to otrzymane równanie:

$$\frac{\partial}{\partial z} A(z, t) + \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} A(z, t) + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(z, t) = 0 \quad (1.35)$$

posiada analityczne rozwiązanie w przypadku gdy obwiednia impulsu na początku propagacji, w punkcie  $z = 0$  przyjmuje kształt gaussowski. Zanim jednak to wykażemy w bezpośrednim rachunku, zauważmy że możemy pominąć w tym równaniu pierwszą pochodną przechodząc do układu współrzędnych, który porusza się w stosunku do układu laboratoryjnego z prędkością równą prędkości grupowej. Transformacja do nowego układu współrzędnych odpowiada zamianie zmiennych  $z' = z$ ,  $t' = t - \beta_1 z$  i łatwo zauważyć że w nowych zmiennych rzeczywiście pozbywamy się wyrazu z pierwszą pochodną, natomiast pozostałe współczynniki nie zmieniają się. W naszym nowym układzie współrzędnych środek impulsu nie porusza się i lepiej możemy obserwować zmianę kształtu obwiedni wywołaną dyspersją. Jeśli teraz do równanie drugiego rzędu podstawimy transformatę Fouriera obwiedni impulsu otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne:

$$\frac{\partial}{\partial z} A(z, \omega) = \frac{i}{2} \beta_2 \omega^2 A(z, \omega), \quad (1.36)$$

które posiada proste rozwiązanie:

$$A(z, \omega) = \exp\left(\frac{i}{2} \beta_2 \omega^2 z\right) A(0, \omega). \quad (1.37)$$

W ostatniej równości występuje wielkość  $A(0, \omega)$ , która jest równa transformacie Fouriera początkowej obwiedni. Ta ostatnia dla impulsu gaussowskiego postaci  $A(0, t) = A_0 \exp(-\frac{1}{2} \frac{t^2}{t_0^2})$  jest znana i równa  $A(0, \omega) = \frac{A_0 t_0}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2} \omega^2 t_0^2)$ . Jeśli to wyrażenie podstawimy do równania (1.37) a potem obliczymy odwrotną transformatę Fouriera to ostatecznie otrzymamy analityczne wyrażenie na kształt obwiedni w dowolnym punkcie w

ośrodka w analitycznej postaci:

$$A(z, t) = A_0 \frac{t_0}{\sqrt{t_0^2 - i\beta_2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(t - \beta_1 z)^2}{t_0^2 - i\beta_2 z}\right) \quad (1.38)$$

- Zadanie 2** (a) Przeprowadzić szczegółowe rachunki i wyprowadzić wzór (38)  
 (b) Przeprowadzić analogiczne rachunki dla impulsu początkowego posiadającego chirp, czyli danego wzorem  $A(0, \omega) = \frac{A_0 t_0}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(1 + i\alpha)\omega^2 t_0^2\right)$   
 (c) Znaleźć kształt impulsu po propagacji w ośrodku o znikającej dyspersji prędkości grupowej. Impuls ma na wejściu do ośrodka kształt gaussowski, długość propagacji wynosi  $L$ , a ponieważ  $\beta_2(\omega_0) = 0$  (dla centralnej częstotliwości impulsu), trzeba uwzględnić dyspersję trzeciego rzędu  $\beta_3(\omega_0)$ .

### Rysunek

Przyjrzyjmy się teraz implikacjom jakie wynikają z tego ostatniego wyrażenia. Po pierwsze zauważamy że czas trwania impulsu rośnie wraz ze wzrostem  $z$  i jest równa  $\Delta t(z) = t_0 \sqrt{1 + \frac{\beta_2 z}{t_0^4}}$  a zatem po przebyciu drogi równej  $L_D = \frac{t_0^2}{|\beta_2|}$  czas trwania impulsu wzrasta o  $\sqrt{2}$ . Parametr  $L_D$  będziemy w dalszym ciągu nazywali drogą dyspersji. W ten sposób zdefiniowaliśmy część podstawowych terminów ze słownika teorii propagacji impulsów świetlnych. Kilka następnych, związanych z dyfrakcją wprowadzimy w następnym wykładzie. Na koniec zauważmy jeszcze, że wektor natężenia pola elektrycznego jest funkcją zmiennych  $z$  oraz  $t$ . Fizyczny problem propagacji impulsu sformułowaliśmy tak, aby znaleźć pełny przebieg czasowy impulsu w danym punkcie, znając taki przebieg w punkcie "wcześniejszym"  $z - \Delta z$ . Dlatego warunki początkowe najbardziej naturalnie jest zdefiniować na granicy ośrodka optycznego. Należy przy tym uwzględnić załamanie i odbicie na tej granicy. My dla ułatwienia skorzystaliśmy powyżej z warunków początkowych już wewnątrz ośrodka optycznego. Uwzględnienie przechodzenia impulsu przez granicę ośrodka zagadnienia liniowego nie jest to znacząca komplikacją. To zagadnienie jest nietrywialnym problemem samym w sobie jeśli uwzględnić nieliniowe aspekty propagacji. Wrócimy do tego problemu w dalszej części wykładu.



## Rozdział 2

# Liniowa propagacja w ośrodkach anizotropowych.

### 2.1 Związek dyspersyjny

W pierwszym wykładzie przypomnieliśmy równania Maxwella i powiedzieliśmy, że szczególnymi rozwiązaniami tych równań są fale płaskie. Nie dyskutowaliśmy wektorowego charakteru pól elektrycznych i magnetycznych, ograniczając się do przypadku ośrodków izotropowych, a na koniec rozważyliśmy jednowymiarową propagację, po to aby zdefiniować pojęcia prędkości grupowej, dyspersji prędkości grupowej dyspersji trzeciego rzędu. Na tym wykładzie uzupełnimy nasze rozważania, dyskutując wektorowy (tensorowy) charakter równań Maxwella.

Rozważmy monochromatyczną falę płaską w ośrodku izotropowym. Wektory natężenia pola elektrycznego i indukcji magnetycznej są wówczas dane wzorami:  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$  oraz  $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$ . Jeśli podstawimy tak zdefiniowane pola do równań Maxwella (1.1) i (1.2), otrzymamy następujące związki:  $\vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0$  i  $\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$ , a zatem kierunki wektorów  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{B}_0$  i  $\vec{k}$  w ośrodku izotropowym są wzajemnie ortogonalne. Nie jest to jednak prawdą dla ośrodków anizotropowych, jak się za chwilę przekonamy.

W poprzednim wykładzie wyprowadziliśmy, korzystając z równań Maxwella, równanie falowe dla wektora natężenia pola elektrycznego. Wyprowadziliśmy je zachowując ogólną postać tensora dielektryczny  $\hat{\epsilon}$ :

$$\Delta \vec{E} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{c^2} \hat{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0, \quad (2.1)$$

a następnie przedyskutowaliśmy przypadek izotropowy, gdy tensor dielektryczny redukuje się do  $\hat{\epsilon} = \epsilon \hat{I}$ , gdzie  $\hat{I}$  jest tensorem jednostkowym. Odrzućmy teraz to ograniczenie i zobaczmy co możemy wywnioskować z równania falowego w najogólniejszym przypadku. Będziemy korzystali z faktu, że w ośrodku jednorodnym zawsze istnieje układ odniesienia, w którym tensor  $\hat{\epsilon}$  jest diagonalny.

*Kiedy częstość pola zaburzającego dąży do zera ( $\omega \rightarrow 0$ ) można, używając argumentów termodynamicznych, opierając się na założeniu że układ składający się z pola elektromagnetycznego oraz ośrodka znajduje się w równowadze termodynamicznej, wykazać że tensor dielektryczny musi być w tej granicy tensorem symetrycznym. Dla zmiennych w*

czasie pól elektrycznych symetryczność tensora dielektrycznego można wykazać rozważając szybkość zmian gęstości energii pola elektrycznego (dowód ten wykracza poza ramy prezentowanego wykładu i można go znaleźć ...).

Jeśli do równania (2.1) podstawimy rozwiązanie w postaci fali płaskiej,  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$ , to otrzymamy związek pomiędzy częstością  $\omega$  i wektorem falowym  $\vec{k}$ . Związek ten nazywany jest związkiem dyspersyjnym. Jak się za chwilę przekonamy, pozwala on wyznaczyć wartość współczynnika załamania ośrodka, na podstawie informacji, które posiadamy o tensorze dielektrycznym. Założymy także, że  $\vec{k} = \frac{n(\omega)\omega}{c}\vec{s}$ , gdzie  $\vec{s}$  jest wektorem (wektorem jednostkowym) w kierunku wektora propagacji. Otrzymamy wówczas następujący związek:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \left[ n^2 (\vec{s} \cdot \vec{s}) \vec{E} - n^2 \vec{s} (\vec{s} \cdot \vec{E}) - \hat{\epsilon} \mu \vec{E} \right] = 0 \quad (2.2)$$

Jeśli ponadto wybierzemy układ współrzędnych tak, aby tensor dielektryczny był w nim diagonalny, to zastępując iloczyny skalarne poprzez sumy możemy zapisać ten związek jako:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \sum_l \left[ \delta_{il} \varepsilon_l E_l - \frac{n^2}{\mu} [\delta_{il} - s_i s_l] E_l \right] = 0 \quad (2.3)$$

Podzielimy następnie równanie (2.3) przez  $\frac{\omega^2}{c^2}$  a następnie pomnożmy przez  $s_i$  i wykonajmy sumowanie po  $l$ . Sumowanie odbywa się tu po wszystkich trzech składowych w kartezjańskim układzie odniesienia. Po wykonaniu sumy otrzymujemy:

$$s_i \varepsilon_i E_i - \frac{n^2}{\mu} (s_i E_i - s_i s_i (\vec{s} \cdot \vec{E})) = 0 \quad (2.4)$$

Przenieśmy na prawą stronę równania wyraz zawierający  $\vec{s} \cdot \vec{E}$  i podzielimy obie strony otrzymanego równania przez  $\frac{n^2}{\mu} - \varepsilon_i$ . Wykonajmy następnie sumowanie po wskaźniku  $i$ . Po prostym przekształceniu otrzymujemy:

$$(\vec{s} \cdot \vec{E}) \left[ 1 - \frac{n^2}{\mu} \sum_i \frac{s_i^2}{\frac{n^2}{\mu} - \varepsilon_i} \right] = 0 \quad (2.5)$$

W ostatnim kroku naszego prostego rachunku podzielimy równanie (2.5) przez  $s \cdot \vec{E}$ , skorzystamy z tożsamości  $\frac{1}{1 - \frac{a}{b}} = 1 - \frac{\frac{1}{b}}{1 - \frac{a}{b}}$  oraz wykorzystamy fakt że wektor jest wektorem jednostkowym ( $\sum_i s_i^2 = 1$ ), aby otrzymać ostatecznie:

$$\sum_i \frac{s_i^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\mu \varepsilon_i}} = 0 \quad (2.6)$$

Jeśli ośrodek optyczny nie ma wyraźnej struktury krystalicznej (jest amorficzny) to jak można łatwo pokazać posiada on własności izotropowe, i wówczas propagacja światła nie zależy od kierunku wektora falowego. Kryształy można sklasyfikować pod względem własności optycznych dzieląc je na trzy zasadnicze kategorie. (1) Do pierwszej kategorii należą kryształy sześciennie (kubiczne). Można dla nich zawsze znaleźć trzy wzajemnie ortogonalne i równoważne kierunki. W każdym układzie współrzędnych tensor

dielektryczny jest diagonalny przy czym wszystkie elementy na diagonalu są sobie równe. W takich ośrodkach wektory indukcji dielektrycznej i natężenia pola elektrycznego są równoległe a z punktu widzenia własności optycznych taki kryształ jest równoważny ośrodkowi amorficznemu. (2) Drugą grupę tworzą kryształy, w których dwie albo więcej krystalograficznie równoważnych kierunków leży w jednej płaszczyźnie. Do tej grupy należą kryształy trygonalne, tetragonalne i heksagonalne; oś prostopadła do wspomnianej płaszczyzny zawierającej kierunki równoważne jest wówczas osią symetrii trzy cztero i sześciokrotnej. W takich kryształach tensor dielektryczny, w swojej postaci kanonicznej, ma dwie różne wartości własne. Jedna z osi kryształu musi być wybrana wzdłuż osi symetrii (odpowiada jej wartość własna  $\varepsilon_{\perp}$ ) dwie pozostałe mogą być wybrane dowolnie (dwie wartości własne  $\varepsilon_{\parallel}$ ). Oś symetrii nazywana jest osią optyczną kryształu, a kryształy należące do tej kategorii nazywane są kryształami jednoosiowymi. (3) Wszystkie pozostałe kryształy należą do trzeciej kategorii, kryształów dwuosiowych. Należą do tej grupy kryształy rombowe, jednoskośne i trójskośne. W tym przypadku wszystkie trzy wartości własne tensora dielektrycznego są różne. W dalszej części tego wykładu ograniczymy się do anizotropowych ośrodków jednoosiowych, aby zachować większą przejrzystość naszych rozważań i obliczeń. Czytelnikom zainteresowanym uzupełnieniem wiadomości na temat ośrodków anizotropowych i kryształów dwuosiowych polecamy monografię F. Ratajczyka oraz podręczniki Borna i Wolfa (Optics) i Lifshitz'a Landaua (Electrodynamics).

Na rysunku nr. 2 pokazaliśmy układ współrzędnych kryształu jednoosiowego, w którym tensor dielektryczny jest diagonalny; w tym układzie współrzędnych składowe wektora  $s$  są odpowiednio równe:  $s_x = s \sin \theta \cos \alpha$ ,  $s_y = s \sin \theta \sin \alpha$ ,  $s_z = s \cos \theta$  a po podstawieniu do równania (2.5) równanie na współczynnik załamania  $n$  przyjmuje postać:  $\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{\mu \varepsilon_{\parallel}} + \frac{\sin^2 \theta}{\mu \varepsilon_{\perp}}$ . Zamkniemy ten paragraf kilkoma uwagami i wyjaśnieniami. Podane przez nas równanie dotyczy tak zwanego promienia nadzwyczajnego (współczynnik załamania zależy od kierunku propagacji). W przypadku jednoosiowym istnieje jeszcze drugie rozwiązanie na  $n$  (nie zależne od  $\theta$ ) tak zwany promień zwyczajny. Rozwiązanie to wyeliminowaliśmy podczas dzielenia równania (2.5) przez  $\vec{s} \cdot \vec{E}$ . Dla promienia zwyczajnego ten iloczyn jest równy zero. Dlatego wykonując powyższe dzielenie gubimy jedno rozwiązanie równania (2.5). W przypadku kryształów dwuosiowych równanie (2.5) staje się równaniem dwukwadratowym i ma dwa rozwiązania; w tym wypadku otrzymujemy dwa promienie nadzwyczajne.

## 2.2 Liniiowe równanie propagacji w ośrodku jednoosiowym.

W tej części wykładu wyprowadzimy równanie propagacji dla obwiedni impulsu optycznego w ośrodku anizotropowym - kryształ jednoosiowy. Sposób w jaki to równanie wprowadzimy będzie stanowił uogólnienie metody zastosowanej w pierwszym wykładzie i dotyczącym przypadku jednowymiarowego. Poniższe rozważania przytaczamy z dwóch powodów: po pierwsze stanie się ono pretekstem do wprowadzenia terminologii używanej w teorii propagacji impulsów optycznych, a przy tej okazji wyjaśnimy również na czym polegają i jak należy rozumieć standardowe przybliżenia w tej teorii stosowane: przybliżenie wolno-zmiennej obwiedni oraz przybliżenie przyosiowe.

Naszym celem jest opisanie propagacji impulsu świetlnego, którego centralny wektor falowy jest skierowany wzdłuż osi (a jak się za chwilę przekonamy nie zawsze jest on tożsamy z wektorem Pointinga, opisującym kierunek poruszania się energii impulsu). Na wstępie zdefiniujemy pojęcie wolno zmiennej obwiedni impulsu:  $E(\vec{x}, t) = A(\vec{x}, t)e^{i(\vec{k}_0\vec{x} - \omega_0 t)}$  gdzie  $\omega_0$  jest centralną częstotliwością kołową impulsu, a  $\vec{k}_0$  jego centralnym wektorem falowym. W przedstawieniu naszego impulsu na fale płaskie będziemy mieli wiele składowych, ale będą one skoncentrowane wokół tej *centralnej fali*. Innymi słowy można powiedzieć, że transformata Fouriera natężenia pola elektrycznego będzie miała maksimum wokół tych centralnych wartości. Wektor obwiedni pola elektrycznego zmienia się w czasie, a także w przestrzeni znacznie wolniej niż czynnik fazowy  $e^{i(\vec{k}_0\vec{x} - \omega_0 t)}$  można go przedstawić jako sumę fal płaskich:

$$A(\vec{x}, t) = \int d^3k d\omega E(\vec{k}, \omega) e^{-i(\vec{k}_0\vec{x} - \omega t)} e^{i(\vec{k}_0\vec{x} - \omega t)} \delta\left(k^2 - \frac{n^2(\omega, \vec{s})\omega^2}{c^2}\right) \quad (2.7)$$

W ostatnim wyrażeniu mamy na końcu funkcję delta Diraca, która wyraża fakt, że składamy tylko te fale, które same stanowią rozwiązanie równań Maxwella, a co za tym idzie ich wektory falowe są powiązane z częstotliwością poprzez związek dyspersyjny. Była o tym mowa na początku tego wykładu, a także w wykładzie poprzednim. W ogólnym przypadku współczynnik załamania zależy od kierunku wektora falowego oraz od częstotliwości, dlatego oba te parametry zostały umieszczone jako argumenty współczynnika załamania  $n$ , a  $\vec{s}$  oznacza jednostkowy wektor o kierunku wektora  $\vec{k}$ . Podobnie też jak w poprzednim wykładzie policzymy teraz pochodną obwiedni impulsu po  $z$ , czyli w kierunku propagacji:

$$\frac{\partial}{\partial z} A(\vec{x}, t) = \int d^3k d\omega E(\vec{k}, \omega) i(k_z - k_0) e^{-i(\vec{k}_0\vec{x} - \omega t)} e^{i(\vec{k}_0\vec{x} - \omega t)} \delta\left(k^2 - \frac{n^2(\omega, \vec{s})\omega^2}{c^2}\right) \quad (2.8)$$

Ponieważ centralny wektor falowy jest skierowany wzdłuż osi  $z$ , w wyrażeniu podcałkowym pojawia się różnica  $z$ -towej składowej  $\vec{k}$  oraz  $\vec{k}_0$ . Fakt, że na końcu wyrażenia podcałkowego pojawia się delta Diraca powoduje, że możemy wykonać jedno całkowanie (tutaj wybierzemy całkowanie po  $k_z$ ) i w wyrażeniu (2.8) podstawić w miejsce  $k_z$  rozwiązanie równania:

$$k_z^2 = \frac{n^2(\omega, \vec{s})\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 \quad (2.9)$$

Ostatecznie możemy napisać:

$$\frac{\partial}{\partial z} A(\vec{x}, t) = \int \int dk_x dk_y d\omega e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{-i(\omega - \omega_0)t} i(k_z - k_0) E(k_x, k_y, k_z, \omega) e^{i(k_z - k_0)z} \quad (2.10)$$

i wszędzie gdzie występuje  $k_z$  powinniśmy wstawić funkcję parametrów  $k_x, k_y, \omega$  wynikającą ze związku dyspersyjnego (2.9). Jeśli teraz zamiast tej dokładnej, funkcyjnej zależności wektora od jego argumentów podstawimy rozwinięcie w szereg Taylora wokół wartości centralnych, będziemy mogli odwrócić transformatę Fouriera i otrzymać równanie różniczkowe cząstkowe na obwiednię impulsu. Jest w tym rozumowaniu pewna trudność. Zwróćmy uwagę, że w całce transformaty Fouriera sumowanie po wektorach

falowych odbywa się w układzie współrzędnych, w którym kierunek  $z$  jest równoległy do kierunku centralnego wektora falowego  $k_0$ . Natomiast związek dyspersyjny jest zwykle (i to jest najbardziej naturalny wybór) napisany w układzie współrzędnych kryształu, układzie w którym diagonalizuje się tensor dielektryczny. Oba te układy przedstawiliśmy na rysunku ?. W przypadku kryształu jednoosiowego można ten ostatni układ współrzędnych wybrać tak, aby przejście z jednego do drugiego układu odbywało się przy użyciu tylko jednego obrotu; na przykład wokół osi  $y$ , o kąt równy  $\theta_0$ . W układzie współrzędnych kryształu związek dyspersyjny ma postać:  $\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{k_x'^2 + k_y'^2}{n_e^2} + \frac{k_z'^2}{n_0^2}$  i aby go zapisać w układzie wyznaczonym przez centralny wektor falowy należy dokonać transformacji:  $k_y' = k_y$ ,  $k_x' = k_x \cos \theta_0 + k_z \sin \theta_0$ ,  $k_z' = -k_x \sin \theta_0 + k_z \cos \theta_0$ . W tych nowych, związanych z centralnym wektorem falowym, współrzędnych, związek dyspersyjny jest nadal równaniem kwadratowym na  $k_z$  i można podać jego rozwiązanie w postaci:

$$k_z = \frac{1}{2} n^2 \sin 2\theta_0 \left\{ \frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_0^2} \right\} k_x \pm \sqrt{\frac{n^2(\omega)\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{n_e^2} k_y^2 - \frac{n^4}{n_0^2 n_e^2} k_x^2} \quad (2.11)$$

gdzie  $n^2$  zostało zdefiniowane poprzez równanie:  $\frac{1}{n^2} = \frac{\cos^2 \theta_0}{n_e^2} + \frac{\sin^2 \theta_0}{n_0^2}$ . W ten sposób otrzymaliśmy związek dyspersyjny w układzie współrzędnych, w którym jest wyrażona transformata Fouriera (2.10) i teraz możemy dokonać rozwinięcia w szereg Taylora, otrzymując równanie różniczkowe opisujące propagację obwiedni impulsu. Zanim to równanie napiszemy (napiszemy oczywiście równanie przybliżone, obcinając szereg Taylora na trzecim rzędzie rozwinięcia, ale metoda dopuszcza rozwinięcie do dowolnego rzędu) zauważmy, że w przypadku gdy ośrodek byłby izotropowy ( $n_e = n_0 = n$ ) rezultat nasz upraszcza się i otrzymujemy po prostu:  $k_z = \pm \sqrt{\frac{n^2(\omega)\omega^2}{c^2} - k_y^2 - k_x^2}$ . Dwa różne znaki w tych równaniach odpowiadają dwóm różnym falom o tych samych wartościach  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $\omega$ , które mogą się propagować w naszym ośrodku. W przypadku kiedy polaryzacja ośrodka jest liniową funkcją natężenia pola elektrycznego, te dwie fale propagują się niezależnie, i jeśli interesuje nas konkretna paczka falowa (impuls) to na ogół tylko jedna z tych fal płaskich wchodzi w skład paczki. Druga uwaga dotyczy rozwinięcia w szereg Taylora. Prezentowana tutaj metoda wyprowadzenia równania propagacji jest metodą perturbacyjną, a zatem muszą istnieć parametry rozwinięcia. Wielkość tych parametrów mówi nam o jakości przybliżenia, podobnie jak w rachunku perturbacyjnym w mechanice kwantowej, rachunek zaburzeń traci sens gdy wartość jakiegokolwiek z tych parametrów zbliża się do jedności. Mówimy tu o kilku parametrach bo jest to wielowymiarowy rachunek zaburzeń. Te parametry można podzielić na parametry przestrzenne i czasowe. Parametr czasowy jest związany z wielkością  $\omega_0 \tau_0$ , gdzie  $\omega_0$  jest centralną częstotliwością impulsu, a  $\tau_0$  jest czasem trwania impulsu. Parametr przestrzenny jest określony przez iloczyn  $k_0 \sigma_0$ ; tutaj  $k_0$  jest centralnym wektorem falowym, a  $\sigma_0$  opisuje poprzeczny rozmiar impulsu (lub wiązki). Do tych parametrów wrócimy za chwilę, przy dyskusji charakterystycznych długości w równaniu propagacji, ale zauważmy jeszcze, że ograniczenie do drugiego rzędu rachunku zaburzeń w przedstawionym schemacie odpowiada przybliżeniom: wolno zmiennej obwiedni w domenie czasowej i przybliżeniu przyosiowemu przy opisie zachowania impulsu w kierunku poprzecznym do kierunku propagacji. Teraz już napiszemy nasze równanie propagacji, ograniczając się do trzeciego rzędu rozwinięcia i przez pozostałą część wykładu będziemy dyskutowali jego fizyczne konsekwencje.

Równanie propagacji w trzecim rzędzie rozwinięcia perturbacyjnego ma postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} A(\vec{x}, t) = & -\beta_1 \frac{\partial}{\partial t} A(\vec{x}, t) - \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(\vec{x}, t) + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} A(\vec{x}, t) + \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} A(\vec{x}, t) \\ & + \frac{i}{2} \gamma_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(\vec{x}, t) + \frac{i}{2} \gamma_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} A(\vec{x}, t) + \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} A(\vec{x}, t) + \frac{i}{2} \gamma_{xt} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} A(\vec{x}, t) \\ & + \frac{i}{3} \gamma_{xxt} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} A(\vec{x}, t) + \frac{i}{3} \gamma_{yyt} \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial t} A(\vec{x}, t) + \frac{i}{3} \gamma_{xtt} \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} A(\vec{x}, t) \quad (2.12) \end{aligned}$$

### 2.2.1 Rozwiązanie równania pierwszego rzędu

Zauważmy, że równanie (2.12), gdy ograniczymy się do wyrazów pierwszego rzędu, sprowadza się do postaci:

$$\frac{\partial}{\partial z} A(\vec{x}, t) = -\beta_1 \frac{\partial}{\partial t} A(\vec{x}, t) + \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} A(\vec{x}, t) + \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} A(\vec{x}, t) \quad (2.13)$$

To równanie można sprowadzić do postaci  $\vec{v} \vec{\nabla} A(\vec{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} A(\vec{x}, t) = 0$  i wobec tego rozwiązanie na obwiednię, z warunkiem początkowym  $A(x, y, z = 0, t) = A_0(t)$  można zapisać w postaci:

$$A(x, y, z, t) = A_0 \left( x - z \frac{V_{g,x}}{V_{g,z}}, y - z \frac{V_{g,y}}{V_{g,z}}, z = 0, t - \frac{z}{V_{g,z}} \right) \quad (2.14)$$

Jest to po prostu impuls rozchodzący się bez zmiany kształtu, z prędkością grupową  $\vec{V}_g$ , bo przecież w pierwszym rzędzie naszego rozwinięcia nie ma wyrazów odpowiedzialnych za dyspersję, ani dyfrakcję. Prędkość grupowa jest równa  $\vec{V}_g = \left( \frac{\gamma_x}{\beta_1}, \frac{\gamma_y}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_1} \right)$ . Jak widzimy prędkość grupowa, w najogólniejszym przypadku kryształu dwuosiowego, może mieć niezerowe składowe oraz  $V_x$  i  $V_y$ . Zjawisko dryfu (walk off).

### 2.2.2 Rozwiązanie równania drugiego rzędu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} A(\vec{x}, t) = & -\frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(\vec{x}, t) + \frac{i}{2} \gamma_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(\vec{x}, t) \\ & + \frac{i}{2} \gamma_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} A(\vec{x}, t) + \frac{i}{2} \gamma_{xt} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} A(\vec{x}, t) \quad (2.15) \end{aligned}$$

### 2.2.3 Rozwiązanie równania trzeciego rzędu

## 2.3 Eksperyment

Skręcenie obwiedni impulsu optycznego zostało zademonstrowane doświadczalnie. W eksperymencie femtosekundowy impuls świetlny został rozdzielony za pomocą płytki światłodzielnącej (BS1) na dwa identyczne impulsy, które poruszają się wzdłuż dwóch ramion interferometru. Schemat doświadczenia prezentujemy na rysunku (). W każdym z ramion interferometru umieszczono w układzie soczewek kryształ rutylu (C1 i C2 na

rysunku). Jest to kryształ o bardzo silnej dwójłomności. Rozważmy dla przykładu rozchodzenie się impulsu w pierwszym ramieniu. Soczewka (L1) skupiała impuls na kryształcie rutylu (C1). W (C1) impuls ulegał skręceniu, jak wykazaliśmy w paragrafie (2.4). Po przejściu przez kryształ impuls był ponownie kolimowany na drugiej soczewce (L2) i trafiał na lustro (M1), ulegając odbiciu. Ruch impulsu w drugim ramieniu był analogiczny. Osie optyczne kryształów w obu ramionach interferometru ustawiono tak, aby skręcenia były przeciwne. Po odbiciu od lusterek (M1 i M2) umieszczonych na końcu ramion interferometru impulsy zawracają, ponownie przechodzą przez kryształy (C1 i C2), ulegając dodatkowemu skręceniu, i płytka światłodziela kieruje je do kamery i detektora. W płaszczyznach kamery i detektora wytwarza się obraz interferencyjny, powstały na skutek nakładania się obu impulsów. Przyjrzyjmy się bliżej temu obrazowi interferencyjnemu. Impulsy przekrywają się tylko na małym obszarze, ponieważ są wzajemnie skręcone, jak pokazuje rysunek. Miejsce tego przekrywania możemy regulować, zmieniając drogę optyczną jednego z promieni. Zmiana ta następuje w wyniku ruchu lusterka (M1). Zauważmy następnie, że mierząc wielkość dodatkowej drogi optycznej impulsu w ramieniu 1, potrzebną na to aby środek obrazu interferencyjnego przesunął się ze środka obszaru widzenia do jego środka, mierzymy de facto kąt wzajemnego skręcenia obu promieni. Znając ustawienie osi optycznych oraz grubość kryształów możemy wielkość każdego z kątów skręcenia obliczyć, korzystając ze wzoru wyprowadzonego w paragrafie (2.4).





## Rozdział 3

# Nieliniowa podatność dielektryczna. Model Lorentza.

Już na pierwszym wykładzie powiedzieliśmy, że ze względu na późniejsze uogólnienia najwygodniej jest zapisać równanie falowe, wynikające z równań Maxwella, tak by po lewej stronie równania stała polaryzacja ośrodka, jako siła pobudzająca.

$$\Delta \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P} \quad (3.1)$$

Polaryzacja ta jest efektem pobudzenia ośrodka i jest równa zero dla próżni. W pierwszym wykładzie wprowadziliśmy także prosty model klasyczny, w którym pobudzane atomy ośrodka zastąpiliśmy klasycznymi oscylatorami harmonicznymi. Zakładamy że jądro atomu, jako znacznie cięższe a więc mające znacznie większą bezwładność nie jest tak wrażliwe na zmiany pola elektrycznego, jak elektron. Ponieważ posiadają one ładunki o przeciwnych znakach, tworzą razem mikroskopowy dipol. W ośrodku takich atomów-dipoli znajduje się bardzo dużo, a ponieważ ich momenty dipolowe ustawiają się wzdłuż pola, w ośrodku powstaje makroskopowy moment dipolowy. Na pierwszym wykładzie, korzystając z równania 3.1 i zakładając że polaryzacja jest liniową funkcją natężenia pola, wprowadziliśmy i przedyskutowaliśmy klasyczny model współczynnika załamania. Ten model, zaproponowany przez Lorentza, stanowi dobre przybliżenie dla opisu liniowych (małe natężenia wiązek) własności propagacji w parach atomowych i niemetalicznych ciałach stałych. Jeśli natężenie padającej fali świetlnej rośnie, to odpowiedź ośrodka, czyli ruch małych dipoli (ściśle mówiąc wewnętrzne stopnie swobody, a nie ruch środka masy), może się stać anharmoniczny. Bardzo ciekawe i pouczające jest, jak zobaczymy, zbadanie, jakie są konsekwencje występowania nieliniowości w sile przywracającej położenie równowagi naszych "małych dipoli". Podzielimy ośrodki optyczne na dwie klasy: ośrodki które mają środek inwersji i takie które go nie posiadają.

### 3.1 Ośrodki optyczne bez środka inwersji.

W ośrodkach pierwszego typu, potencjał wewnętrzny w którym poruszają się elektrony musi być funkcją parzystą:  $U(\vec{r}) = U(-\vec{r})$  i jeśli chcemy uwzględnić anharmoniczność potencjału, do części harmonicznego musimy dodać wyraz co najmniej czwartego rzędu:  $U = 1/2 m \omega_0^2 \vec{r}^2 + 1/4 a m \vec{r}^4$ . Dlatego zaczniemy nasze rozważania od ośrodków bez

środku inwersji, jako że tam dopuszczalny jest potencjał niższego rzędu:  $U = 1/2m\omega_0^2 r^2 + 1/3amr^3$ . Ponieważ jednak nie chcemy czynić żadnych założeń dotyczących symetrii ośrodka, przyjmujemy, że  $a$  jest tensorem trzeciego rzędu. Wtedy potencjał będzie postaci:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r_i r_i + \frac{1}{3}ma_{ijk}r_i r_j r_k \quad (3.2)$$

Model Lorentza zawiera jedną zasadniczą nieścisłość, ale ma też jedną poważną zaletę. Jego wadą jest fakt występowania pojedynczej częstości rezonansowej. Rzeczywiste atomy mają wiele częstości rezonansowych i otrzymane tutaj wyrażenia na podatności dielektryczne będą miały tylko sens przybliżony. Analogiczne obliczenia można przeprowadzić bardziej precyzyjnie w modelu kwantowym, traktując poprawnie strukturę energetyczną atomów. Obliczenia wykonuje się w rachunku perturbacyjnym. Ale, uwaga, model Lorentza ma też jedną zaletę. Można w nim bardzo prosto uwzględnić tłumienie w ruchu harmonicznym dipoli. W ten sposób nie napotykamy na trudności w pobliżu rezonansu. Analogicznie, w przypadku kwantowym, aby uniknąć tych osobliwości, należy uwzględnić skończony czas życia stanów wzbudzonych atomów, a zatem prawidłowy rachunek dla podatności dielektrycznej powinien być przeprowadzony przy użyciu równania Luoivilla dla macierzy gęstości. Jest on schemat bardzo pracochłonny i dlatego nie podajemy go na tym wykładzie. Czytelników zainteresowanych szczegółami tego wyprowadzenia odsyłamy do podręczników Boyda lub Shena.

Rozważmy teraz równanie ruchu dipola w zewnętrznym polu elektrycznym. Zakładamy, że siła tarcia jest proporcjonalna do prędkości. Dostajemy (rozpisując równanie na składowe):

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} + 2\gamma \frac{dr_i}{dt} + \omega_0^2 r_i + a_{ijk}r_j r_k = -\frac{e}{m}E_i \quad (3.3)$$

W równaniu tym, jak i w dalszych rachunkach, stosujemy konwencję sumacyjną Einsteina.

Założmy, że zewnętrzne pole nie jest ściśle harmoniczne lecz ma składowe o dwu różnych częstościach:  $E_i(t) = \sum_{l=1}^2 E_i^l e^{-i\omega_l t} + c.c.$ , gdzie skrót 'c.c.' oznacza sprzężenie zespolone. Równanie 3.3 rozwiążemy w rachunku perturbacyjnym Rayleigha - Schrödingera. Wprowadzimy mały parametr  $\lambda$  (rozwiązanie opiera się na założeniu że wyraz nieliniowy jest małą poprawką do potencjału harmonicznego), i zastąpimy 'siłę napędzającą' w równaniu 3.3 przez  $\frac{\lambda e}{m}E_i(t)$ . Następnie rozwiniemy rozwiązanie w szereg potęgowy w tym parametrze  $\vec{r} = \lambda \vec{r}^{(1)} + \lambda^2 \vec{r}^{(2)} + \dots$  i porównamy wyrazy po obu stronach równania występujące z tymi samymi potęgami  $\lambda$ . (Górne indeksy w nawiasach oznaczają kolejne stopnie rachunku perturbacyjnego.) Wykonawszy tę procedurę, dostajemy następujący układ równań:

$$\frac{d^2 r_i^{(1)}}{dt^2} + 2\gamma \frac{dr_i^{(1)}}{dt} + \omega_0^2 r_i^{(1)} = -\frac{e}{m}E_i \quad (3.4)$$

$$\frac{d^2 r_i^{(2)}}{dt^2} + 2\gamma \frac{dr_i^{(2)}}{dt} + \omega_0^2 r_i^{(2)} + a_{ijk}r_j^{(1)}r_k^{(1)} = 0 \quad (3.5)$$

...

Ograniczamy się do drugiego rzędu w rachunku zaburzeń. Jeśli wprowadzimy dodatkowo oznaczenie  $D(\omega) = \omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma$  i zauważymy, że wyraz liniowy w parametrze  $\lambda$ ,

$r_i^{(1)}$  posiada części oscylujące ze wszystkimi częstościami  $\omega_l$ , to dostaniemy następujące wyrażenie na rozwiązanie w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń:

$$r_i^{(1)} = \sum_{l=1,2} r_{0i}^{(l)}(\omega_l) e^{-i\omega_l t} + c.c. \quad (3.6)$$

i amplitudy drgań z poszczególnymi częstościami dane są przez  $r_{0i}(\omega_l) = -\frac{eE_i}{mD(\omega_l)}$ . Jest to oczywiście rozwiązanie nie zaburzonego równania harmonicznego. Jest ono identyczne jak w przypadku gdy nie byłoby w ośrodku żadnej nieliniowości. Korzystając z powyższego związku oraz z równań:

$$P_i^{(1)} = \chi_{ij} E_j(\omega_l) \quad (3.7)$$

$$P_i^{(1)} = -Nex_i^{(1)}(\omega_l) \quad (3.8)$$

dostajemy równanie własne:

$$\chi_{ij}(\omega_l) E_j(\omega_l) = \frac{Ne^2}{mD(\omega)} E_i(\omega_l) \quad (3.9)$$

Teraz możemy rozwiązanie na  $\tilde{r}^{(1)}$  podstawić do 3.8. I tu od razu zauważamy coś ciekawego. Równanie 3.8 zawiera zamiast częstości  $\omega_l$  wszystkie możliwe kombinacje typu  $2\omega_l$ ,  $(\omega_l - \omega_m)$ ,  $(\omega_l + \omega_m)$  oraz 0. Na przykład:

$$r_i^{(2)}(2\omega_1) = -\left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{a_{ijk} E_j(\omega_1) E_k(\omega_1)}{D(\omega_1) D(\omega_1) D(2\omega_1)} \quad (3.10)$$

$$r_i^{(2)}(\omega_1 + \omega_2) = -\left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{a_{ijk} E_j(\omega_1) E_k(\omega_2)}{D(\omega_1) D(\omega_2) D(\omega_1 + \omega_2)} \quad (3.11)$$

$$r_i^{(2)}(0) = -\left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{a_{ijk} E_j(\omega_1) E_k(-\omega_1)}{D(\omega_1) D(-\omega_1) D(0)} \quad (3.12)$$

oraz ogólnie:

$$r_i^{(2)}(\omega_l + \omega_m) = -\left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{a_{ijk} E_j(\omega_l) E_k(\omega_m)}{D(\omega_l) D(\omega_m) D(\omega_l + \omega_m)} \quad (3.13)$$

W naszym ośrodku pojawiają się składowe z nowymi częstościami, które nie występowały w fali zewnętrznej. Pojawiły się one pod wpływem nieliniowości (anharmoniczności) potencjału w którym poruszają się elektrony. A ponieważ polaryzacja jest źródłem nowych fal elektromagnetycznych, w procesie oddziaływania pola elektromagnetycznego z ośrodkiem będą generowane fale z częstościami będącymi sumą i różnicą częstości podstawowych, drugie harmoniczne oraz składowa niezależna od czasu. Wyznamy teraz podatność drugiego rzędu. Korzystamy z analogicznych związków, co poprzednio:

$$P_i^{(2)}(\omega_l + \omega_m) = \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_l + \omega_m, \omega_l, \omega_m) E_j(\omega_l) E_k(\omega_m) \quad (3.14)$$

$$P_i^{(2)}(\omega_l + \omega_m) = -Nex_i^{(2)}(\omega_l + \omega_m) \quad (3.15)$$

Stąd, wykorzystując ogólne wyrażenie na  $r$  w drugim rzędzie rachunku zaburzeń, dostajemy:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_l + \omega_m, \omega_l, \omega_m) E_j(\omega_l) E_k(\omega_m) = \frac{Ne^3}{m^2} \frac{a_{ijk} E_j(\omega_l) E_k(\omega_m)}{D(\omega_l + \omega_m) D(\omega_l) D(\omega_m)} \quad (3.16)$$

Zauważmy, że pojawiają się takie procesy jak: generacja drugiej harmonicznej, generacja różnicy częstości, itd. Prześledźmy, jaką postać ma wtedy podatność:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(2\omega_l, \omega_l, \omega_l) E_j(\omega_l) E_k(\omega_l) = \frac{Ne^3}{m^2} \frac{a_{ijk} E_j(\omega_l) E_k(\omega_l)}{D(2\omega_l) D^2(\omega_l)} \quad (3.17)$$

$$\chi_{ijk}^{(2)}(|\omega_l - \omega_m|, \omega_l, \omega_m) E_j(\omega_l) E_k(\omega_m) = \frac{Ne^3}{m^2} \frac{a_{ijk} E_j(\omega_l) E_k(\omega_m)}{D(|\omega_l - \omega_m|) D(\omega_l) D(\omega_m)} \quad (3.18)$$

$$\chi_{ijk}^{(2)}(0, \omega_l, -\omega_l) E_j(\omega_l) E_k(-\omega_l) = \frac{Ne^3}{m^2} \frac{a_{ijk} E_j(\omega_l) E_k(-\omega_l)}{D(0) D(\omega_l) D(-\omega_l)} \quad (3.19)$$

### 3.2 Ośrodki centrosymetryczne.

W ośrodku centrosymetrycznym energia potencjalna musi być symetryczną funkcją wychyle-  
nia:  $U(\vec{r}) = U(-\vec{r})$ . W najniższym rzędzie  $U$  musi być równe  $U = 1/2 m \omega_0^2 x^2 - 1/4 m b x^4$ , czyli siła przywracająca położenie równowagi jest równa:  $F = m \omega_0^2 x - m b x^3$ .  
W takich ośrodkach polaryzowalność jest równa tożsamościowo zero (**dlaczego?**). Przy-  
padek ośrodków centrosymetrycznych zbadamy również zachowując wektorowy charak-  
ter ruchu, aby lepiej uwypuklić tensorowy charakter podatności dielektrycznej. Bardzo  
ciekawym i ważnym przykładem ośrodków centrosymetrycznych są szkła oraz ciecze.  
Są one w dodatku izotropowe. Równanie ruchu ma w tym przypadku postać:

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} + 2\gamma \frac{dr_i}{dt} + \omega_0^2 r_i - b(r_j r_j) r_i = -\frac{e}{m} E_i \quad (3.20)$$

Zauważmy, że założyliśmy pewną szczególną postać tensora  $\hat{b}$  i mogliśmy zastąpić go  
przez iloczyn skalarny wektora położenia i liczbę  $b$ . Założymy dodatkowo, że pole  
pobudzające ośrodek zawiera składowe o trzech różnych częstościach:  $E_i(t) = \sum_{l=1}^3 E_i^l e^{-i\omega_l t} +$   
 $c.c.$ . Zastosujemy rozwinięcie perturbacyjne analogiczne do tego jakie używaliśmy w  
przypadku nie centrosymetrycznym i zauważmy, że równanie dla wyrazu liniowego w  
polu zaburzającym pozostaje identyczne. Otrzymujemy:

$$\vec{r}^{(1)}(\omega_l) = -\frac{e}{m} \frac{\vec{E}(\omega_l)}{D(\omega_l)} \quad (3.21)$$

Wektor polaryzacji jest równy:

$$\vec{P}^{(1)}(\omega_l) = -Ne \vec{r}^{(1)}(\omega_l) = \chi_{ij}^{(1)}(\omega_l) \vec{E}_j \quad (3.22)$$

i dla ośrodka izotropowego:

$$\chi_{ij}^{(1)} = \chi_{ij}^{(1)}(\omega_l) \delta_{ij} = \frac{Ne^2}{m D(\omega_l)} \delta_{ij} \quad (3.23)$$

Drugi rząd rachunku zaburzeń daje nam teraz rozwiązanie tożsamościowo równe zero.  
Uzasadnijmy to stwierdzenie. Przyjrzyjmy się wyrażeniu na wektor położenia w drugim  
rzędzie rachunku zaburzeń:

$$\frac{d^2 r_i^{(2)}}{dt^2} + 2\gamma \frac{dr_i^{(2)}}{dt} + \omega_0^2 r_i^{(2)} = 0 \quad (3.24)$$

Jest to równanie z tłumieniem, w którym nie występuje siła wymuszająca. Zatem układ opisywany takim równaniem będzie dążył do stanu, w którym nie występują drgania. Stąd w drugim rzędzie rachunku zaburzeń dostajemy:  $r_i^{(2)}(t) = 0$ . W trzecim rzędzie, mamy następujące równanie na wektor  $\vec{r}$ :

$$\frac{d^2 r_i^{(3)}}{dt^2} + 2\gamma \frac{dr_i^{(3)}}{dt} + \omega_0^2 r_i^{(3)} = - \left( \frac{be}{m} \right)^3 \sum_{mnp} \left[ \frac{E_j(\omega_m) E_j(\omega_n)}{D(\omega_m) D(\omega_n) D(\omega_p)} E_i(\omega_p) e^{-i(\omega_m + \omega_n + \omega_p)t} \right] \quad (3.25)$$

Analogicznie do poprzedniego przypadku, korzystamy z następujących związków:

$$P_i^{(3)}(\omega_q) = -N e r_i^{(3)}(\omega_q) \quad (3.26)$$

$$P_i^{(3)}(\omega_q) = \sum_{(mnp)} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_q, \omega_m, \omega_n, \omega_p) E_j(\omega_m) E_k(\omega_n) E_l(\omega_p) \quad (3.27)$$

Stąd dostajemy wyrażenie na tensor podatności dielektrycznej trzeciego rzędu w ośrodku izotropowym:

$$\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_q, \omega_m, \omega_n, \omega_p) = \frac{N b e^4}{m^3} [D(\omega_q) D(\omega_m) D(\omega_n) D(\omega_p)]^{-1} \delta_{jk} \delta_{il} \quad (3.28)$$

Wzór ten możemy przedstawić w postaci, która pokazuje pewną symetrię układu. Jest to symetria pomiędzy wyrażeniami  $E_j(\omega_m)$  a  $E_k(\omega_n)$ . Istnieje 6 możliwych permutacji uporządkowania tych wyrażen. Jednak tylko trzy z nich są od siebie niezależne. Wtedy tensor podatności dielektrycznej ma postać:

$$\begin{aligned} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_q, \omega_m, \omega_n, \omega_p) &= \frac{N B e^4}{3 m^3} [D(\omega_q) D(\omega_m) D(\omega_n) D(\omega_p)]^{-1} \times \\ &\times (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Wykorzystując wyrażenie na podatność pierwszego rzędu, dostajemy:

$$\begin{aligned} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_q, \omega_m, \omega_n, \omega_p) &= \frac{b m}{3 N^3 e^4} [\chi^{(1)}(\omega_q) \chi^{(1)}(\omega_m) \chi^{(1)}(\omega_n) \chi^{(1)}(\omega_p)] \times \\ &\times (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

### 3.3 Własności tensora dielektrycznego

W tym podrozdziale omówimy pewne własności, jakie spełniać musi tensor podatności dielektrycznej drugiego rzędu.

Po pierwsze, zauważmy, że rozważana przez nas polaryzacja postaci:

$$P_i(\vec{r}, t) = P_i(\omega_n + \omega_m) e^{-i(\omega_n + \omega_m)t} + P_i(-\omega_n - \omega_m) e^{i(\omega_n + \omega_m)t} \quad (3.31)$$

jest wielkością rzeczywistą, gdyż podlega pomiarowi. Zatem musi spełniony być warunek:

$$P_i(\omega_n + \omega_m) = P_i(-\omega_n - \omega_m)^* \quad (3.32)$$

Analogiczny warunek musi spełniać pole elektryczne:

$$E_i(\omega_n) = E_i(-\omega_n)^* \quad (3.33)$$

Jednak, z uwagi na związek między polem elektrycznym a polaryzacją, natychmiast dostajemy analogiczny warunek dla tensora podatności elektrycznej drugiego rzędu:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m) = \chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_n - \omega_m, -\omega_n, -\omega_m)^* \quad (3.34)$$

Teraz rozważmy wyrażenie na polaryzację nieliniową drugiego rzędu:

$$P_i(\omega_l + \omega_m) = \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_l + \omega_m, \omega_l, \omega_m) E_j(\omega_l) E_k(\omega_m) \quad (3.35)$$

Ponieważ jednak wskaźniki  $j$  oraz  $k$  są wskaźnikami niemymi (wykonujemy po nich sumowanie), a ponadto polaryzacja zależy od sumy częstości, a nie od każdej z nich z osobna, to oczywiście możemy napisać:

$$P_i(\omega_l + \omega_m) = \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_l + \omega_m, \omega_m, \omega_l) E_k(\omega_m) E_j(\omega_l) \quad (3.36)$$

Stąd mamy symetrię tensora podatności dielektrycznej ze względu na przestawienie wskaźników oraz argumentów:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_l + \omega_m, \omega_l, \omega_m) = \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_l + \omega_m, \omega_m, \omega_l) \quad (3.37)$$

Możemy uzyskać dwie dodatkowe symetrie tego tensora, jeżeli rozważymy ośrodek, w którym nie występują straty. Pierwsza z tych symetrii mówi, że wszystkie składowe tensora podatności drugiego rzędu są rzeczywiste. Wynik ten można uzyskać dla klasycznego oscylatora anharmonicznego w obszarze, gdzie wszystkie częstości i ich sumy są znacznie różne od częstości rezonansowej ( $\omega_0$ ). Pełen dowód tego stwierdzenia wymaga jednak odwołania się do opisu kwantowo-mechanicznego. Druga symetria jest pełną symetrią ze względu na permutacje wskaźników. To znaczy, że możemy do woli przestawiać częstości będące argumentami tensora podatności, o ile równocześnie przestawiamy odpowiadające im wskaźniki. Trzeba jednak pamiętać, iż pierwszy argument jest sumą dwóch pozostałych, zatem przestawiając częstości trzeba pamiętać o zmianie znaku. Na przykład:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_1 = \omega_2 - \omega_3) \quad (3.38)$$

Możemy teraz z korzystać z tego, że:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3) = \chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_1 = \omega_2 - \omega_3)^* \quad (3.39)$$

Jednak, jak powiedzieliśmy, tensor podatności jest rzeczywisty w ośrodku bez strat. Zatem:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3) \quad (3.40)$$

Czytelnik, stosując analogiczną procedurę, może z łatwością pokazać, że:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1) \quad (3.41)$$

Przypomnijmy, że pełen dowód tych własności tensora podatności dielektrycznej wymaga zastosowania opisu kwantowego.

Ostatnia symetria, jaką omówimy, nosi nazwę symetrii Kleinmana. Rozważmy oddziaływanie ośrodka nieliniowego z falą elektromagnetyczną, która zawiera mody o częstościach znacznie niższych niż częstość rezonansowa ośrodka. W ośrodku takim nie będzie

oczywiście strat. Stosują się zatem do niego zasady symetrii omówione powyżej. W takich ośrodkach spełniony jest bardzo dobrze warunek:

$$P(t) = \chi^{(2)} E^2(t) \quad (3.42)$$

gdzie  $P$  jest wartością wektora polaryzacji. Tutaj podatność dielektryczna nie jest tensorem, lecz stałą wartością, nie zależną od częstości. Oznacza to, że mamy coś więcej, niż symetria ze względu na przestawienie wskaźników. Skoro podatność nie zależy od częstości, to musi być spełniona zależność:

$$\begin{aligned} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) &= \chi_{jki}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{kij}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) \\ &= \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{jik}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) \\ &= \chi_{kji}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Warunek ten nazywamy symetrią Kleinmana.





## Rozdział 4

# Procesy trzeciego rzędu

*W rozdziale tym skupimy się na opisie zjawisk związanych z wyrazami polaryzacji nieliniowej proporcjonalnymi do trzeciej potęgi pola elektrycznego fali elektromagnetycznej oddziałującej z ośrodkiem.*

### 4.1 Zmiana przenikalności elektrycznej i współczynnika załamania pod wpływem pola elektrycznego fali świetlnej.

Naszą uwagę skupimy na wstępie na procesach, w których (na razie pomijamy tensorowy charakter polaryzowalności) nieliniowa polaryzacja jest równa:

$$P_{NL} = 3\varepsilon_0\chi^{(3)}(\omega, \omega, \omega, \omega)|E(\omega)|^2 E(\omega) \quad (4.1)$$

a więc takich, w których oddziaływanie z falą świetlną staje się w ośrodku źródłem polaryzacji o częstości równej częstości padającej fali i proporcjonalnej do kwadratu modułu amplitudy jej pola elektrycznego. Całkowita polaryzacja ośrodka będzie w tym przypadku wynosiła:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= P_L(\omega) + P_{NL}(\omega) \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(\omega) = \varepsilon_0 \left( \chi^{(1)}(\omega) + 3\chi^{(3)}(\omega, \omega, \omega, \omega)|E(\omega)|^2 \right) E(\omega) \end{aligned} \quad (4.2)$$

W ostatnim wzorze polaryzacja ośrodka została przepisana w sposób formalnie identyczny ze zwykłą polaryzacją liniową, z tą tylko różnicą, że w miejsce niezależnej od pola elektrycznego podatności wstawialiśmy pewną efektywną podatność:

$$\chi_{\text{eff}} = \chi^{(1)}(\omega) + 3\chi^{(3)}(\omega, \omega, \omega, \omega)|E(\omega)|^2 \quad (4.3)$$

proporcjonalną do  $|E|^2$ . W powyższy sposób można opisać sytuację, w których silna fala elektromagnetyczna padając na ośrodek powoduje pojawienie się zależności współczynnika załamania od natężenia tej fali:

$$n = n_0 + 2\bar{n}_2|E(\omega)|^2 \quad (4.4)$$

Gdzie:

$n_0$  – liniowy współczynnik załamania światła w ośrodku,

$\bar{n}$  – nieliniowy współczynnik załamania.

Analogicznie do przypadku liniowego można skorzystać z następującego wzoru:

$$n^2 = 1 + \chi_{\text{eff}} \quad (4.5)$$

Porównanie obu wyrażeń na współczynnik załamania (4.4, 4.5) umożliwia znalezienie związku pomiędzy nieliniowym współczynnikiem załamania  $\bar{n}$ , a tensorem podatności dielektrycznej  $\chi^{(3)}$ . W tym celu należy porównać wyrazy stojące przy tych samych potęgach pola elektrycznego w poniższym wyrażeniu:

$$\begin{aligned} (n_0 + 2\bar{n}_2|E(\omega)|^2)^2 &= 1 + \chi^{(1)} + 3\chi^{(3)}|E(\omega)|^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{n}_2 &= \frac{3\chi^{(3)}}{4n_0} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Występujący w równaniu (4.4) kwadrat modułu amplitudy pola elektrycznego nie jest wielkością mierzalną w eksperymencie. Wielkością mierzalną w doświadczeniach jest natężenie fali elektromagnetycznej. Bardziej użyteczna jest zatem postać równania (4.5), w której *explicite* występuje zależność  $n$  od natężenia fali elektromagnetycznej, a nie od kwadratu modułu jej amplitudy:

$$n = n_0 + n_2 I \quad (4.7)$$

Związek pomiędzy natężeniem fali elektromagnetycznej a kwadratem modułu jej amplitudy dany jest wzorem (w układzie CGS *wyjaśnić*):

$$I = \frac{\varepsilon_0 n_0 c}{2} |E(\omega)|^2 \quad (4.8)$$

gdzie  $c$  jest prędkością światła w próżni. Wykorzystanie powyższej zależności w równaniu (4.5) pozwala wyznaczyć zależność nieliniowego współczynnika załamania (używanego w literaturze) od tensora podatności dielektrycznej:

$$n_2 = \frac{2}{\varepsilon_0 n_0 c} \bar{n}_2 \Rightarrow n_2 = \frac{3}{2\varepsilon_0 n_0^2 c} \chi^{(3)}$$

Występujący w równaniu (4.7) całkowity współczynnik załamania jest wielkością bezwymiarową. Jednostki  $n_2$  muszą być wobec tego odwrotne do jednostek natężenia - najczęściej nieliniowy współczynnik załamania podaje się w  $\left[\frac{\text{cm}^2}{\text{W}}\right]$ .

Za pojawienie się w ośrodku nieliniowego współczynnika załamania pod wpływem silnej fali elektromagnetycznej odpowiedzialnych jest kilka mechanizmów. Przykładami mogą być następujące procesy:

- Padająca na ośrodek silna fala elektromagnetyczna powoduje deformacje i przemieszczenie chmury elektronowej, z czego wynika zmiana momentów dipolowych molekuł ośrodka. Efektywnie moment dipolowy molekuly staje się zależny od trzeciej potęgi pola elektrycznego fali. Zjawisko to nosi nazwę hiperpolaryzowalności elektronowej. Czasy charakterystyczne dla tego procesu są rzędu  $10^{-15}\text{s}$ .

- Interesującym przykładem ośrodków wykazujących zależność współczynnika załamania od natężenia padającej fali świetlnej są ciecze molekularne, których cząsteczki

obdarzone są anizotropową polaryzowalnością. Moment dipolowy, wyindukowany pod wpływem oddziaływania z polem fali elektromagnetycznej nie jest równoległy do kierunku tego pola. Nie jest to konfiguracja korzystna punktu widzenia energii, bowiem dla oddziaływania dipol- pole elektryczne minimum energii potencjalnej odpowiada sytuacji w której zwrot wektora indukowanego momentu dipolowego jest anty-równoległy do zwrotu wektora pola elektrycznego. Dążąc do zminimalizowania energii potencjalnej cząsteczka zacznie się obracać ustawiając swoją oś największej polaryzowalności anty-równolegle do zewnętrznego pola. Fala elektromagnetyczna przechodząc przez tak porządkujący się ośrodek doświadczać będzie zmienionej wartości współczynnika załamania. Ponieważ ruchy termiczne przeciwdziałają orientacji cząsteczek, stopień ich uporządkowania (a więc wielkości efektu nieliniowego) zależy musi od natężenia padającego światła. Z efektami orientacyjnymi wiążą się czasy charakterystyczne rzędu  $10^{-12}$  s.

- W czasach charakterystycznych o wartościach pośrednich pomiędzy  $10^{-15}$  s, a  $10^{-12}$  s mogą występować efekty związane z libracjami molekuł. Libracjami nazywane są małe wychylenia molekuly z położenia równowagi pod wpływem oddziaływania z polem fali elektromagnetycznej i polem wytworzonym przez pozostałe cząsteczki.

- Absorpcja fali elektromagnetycznej powoduje wzrost temperatury ośrodka. Pociąga to za sobą zmianę jego gęstości, która z kolei prowadzi do zmiany współczynnika załamania, proporcjonalnej do zmiany temperatury. Ponieważ zaabsorbowana przez ośrodek część energii fali elektromagnetycznej jest proporcjonalna do jej natężenia, więc i wynikający stąd wzrost temperatury musi być liniowy w natężeniu.

Opisywane wcześniej przypadki są zjawiskami nieliniowymi trzeciego rzędu, w których polaryzacja ośrodka wywołana oddziaływaniem z falą elektromagnetyczną ma częstość identyczną z częstością fali. Znane są również procesy nieliniowe tego samego rzędu, które nie mają tej własności - wymienić tu można generację trzeciej harmonicznej i mieszanie czterech fal. Te procesy będziemy dyskutowali na jednym z następnych wykładów.

Zależność współczynnika załamania od natężenia fali elektromagnetycznej może w tego typu ośrodkach (zwanych ośrodkami typu Kerra) podczas propagacji impulsu manifestować się na wiele sposobów. Tutaj opiszemy cztery spośród takich zjawisk:

- samoistna modulację fazy
- samoistne wyostrenie impulsu
- samoistne przesunięcie częstości
- samoogniskowanie.

## 4.2 Samoistna modulacja fazy (SPM)

Ponieważ zjawisko samoistnej modulacji fazy, samoistnego wyostrenia się impulsu oraz samoistnego przesunięcia częstości wiążą się ze zmianami czasowego profilu impulsu (a także jego widma), a więc pojawiają się nawet w przypadku braku efektów poprzecznych. Aby pomóc czytelnikowi zbudować pierwsze, proste intuicje, zbadamy jednowymiarowy model propagacji fali elektromagnetycznej w ośrodku typu Kerra. Podobnie jak w pierwszym wykładzie będziemy się posługiwali pojęciem wolnozmiennnej obwiedni:

$$E(z, t) = A(z, t)e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c., \quad (4.9)$$

gdzie:

$A(z, t)$  – wolnozmienna obwiednia (SVE)

$\omega_0$  – centralna częstość

$k_0$  – wektor falowy odpowiadający częstości  $\omega_0$

Propagację impulsu świetlnego, ściślej mówiąc propagację obwiedni impulsu w ośrodku Kerra opisuje nieliniowe równanie Schrodingera:

$$\frac{\partial}{\partial z} A + \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} A + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A - i\gamma |A|^2 A = 0 \quad (4.10)$$

w którym:

$$\gamma = n(\omega_0) n_2 \omega_0$$

$$\beta_1 = [v_g(\omega_0)]^{-1}$$

jest odwrotnością prędkości grupowej (została zdefiniowana na pierwszym wykładzie),

oraz:

$$\beta_2 = \frac{1}{c} \left( \frac{d^2(\omega n(\omega))}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0}$$

Dla uproszczenia w równaniu (4.10) pominęliśmy dyspersję wyższego rzędu. Równanie to wprowadziliśmy tutaj bardzo nieformalnie, po prostu dodaliśmy do równania wyprowadzonego na pierwszym wykładzie wyraz nieliniowy. Nie jest to postępowanie eleganckie z matematycznego punktu widzenia, ponieważ aby zachować ścisłość powinniśmy wprowadzić polaryzację nieliniową poprzez równanie falowe. Można jednak pokazać, że istnieje spójna matematycznie, perturbacyjna metoda otrzymania równania (4.10) z równania falowego z nieliniową polaryzacją. Dokonajmy teraz bardzo drastycznego przybliżenia. Pomińmy efekty związane z dyspersją prędkości grupowej ( $\beta_2 = 0$ ) i przejdziemy do układu poruszającego się wraz z obwiednią impulsu (można wtedy zaniedbać pierwszą pochodną obwiedni po czasie). Równanie na  $A(z, t)$  przybierze bardzo prostą postać, a mianowicie:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i\gamma |A|^2 A \quad (4.11)$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest:

$$A(z, t) = A(0, t) \exp(i\Phi_{NL}(z, t)), \quad (4.12)$$

gdzie:

$A(0, t)$  – początkowa obwiednia impulsu

$\Phi_{NL}(z, t) = |A(0, t)|^2 z \gamma$  – zmiana fazy spowodowana propagacją

Jak widać w ramach naszego przybliżenia faza impulsu ulega modyfikacji podczas jego propagacji przez ośrodek nieliniowy, nie ulega natomiast zmianie jego obwiednia. Zmiana fazy nie jest taka sama dla całego impulsu. Jest to spowodowane zależnością  $\Phi_{NL}$  od natężenia, które nie jest stałe w czasie trwania impulsu. Ponieważ chwilowa częstość związana jest z fazą:

$$\omega = \omega_0 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (4.13)$$

samoistna modulacja fazy powoduje poszerzenie widma impulsu.

Uwzględnienie dyspersji prędkości grupowej w równaniu propagacji spowoduje dodatkowo zmianę obwiedni impulsu. Na przykład dla impulsu o obwiedni gaussowskiej

wspólne oddziaływanie SPM i dyspersji może doprowadzić do podziału jego widma. Innym ciekawym przypadkiem jest sytuacja, w której efekty dyspersji prędkości grupowej kompensują działanie samoistnej modulacji fazy. W efekcie, w ośrodku może ukształtować się impuls którego kształt nie ulegnie zmianie podczas propagacji, zwany solitonem. Warunek wzajemnej kompensacji SPM i dyspersji wynika z równania propagacji (4.10). Z samoistną modulacją fazy wiąże się z nim stałe dodatni wyraz  $|A|^2 A$ , który ma największy wpływ na ewolucję impulsu w pobliżu jego szczytu. Druga pochodna amplitudy po czasie jest w rejonie maksimum impulsu ujemna. Wynika z tego, że znaki  $\beta_2$  i  $\gamma$  muszą być przeciwne aby dyspersja prędkości grupowej mogła kompensować efekty samoistnej modulacji fazy. Tę wzajemną kompensację możemy przedstawić poglądowo w następujący sposób:

- **Pomijamy dyspersję**; równanie propagacji przyjmuje postać:

**POPRAWIĆ** Wprowadzić tutaj definicję  $U$  i poprawić na następnej stronie

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i\gamma|A|^2 A \quad (4.14)$$

$$I_{NL}(z, t) = I(0, t) \quad (4.15)$$

$$\phi(z, t) = \gamma|I(t)|^2 z \quad (4.16)$$

Chwilowa częstość,  $\delta\omega = \frac{\partial\phi}{\partial t}$

$$\delta\omega_{NL} \simeq 2 \left[ \frac{zt}{L_{NL}\tau_0^2} \right] + \dots \quad (z, t \ll 1) \quad (4.17)$$

gdzie  $L_{NL} = \gamma^{-1}$  – charakterystyczna droga nieliniowości.

- **Pomijamy wyraz nieliniowy**; równanie propagacji przyjmuje postać:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (4.18)$$

Rozwiązanie dla  $A(z, t) = \sqrt{I(z, t)} \exp(i\phi(z, t))$  przy założeniu, że początkowy impuls miał kształt gaussowski,  $A(0, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2\right)$  (patrz wykład I) ma teraz postać:

$$I(z, t) = \frac{\tau_0^2}{\sqrt{\tau_0^4 + \beta_2^2 z^2}} \exp\left(-\frac{\tau_0^2 t^2}{\tau_0^4 + \beta_2^2 z^2}\right) \quad (4.19)$$

Chwilowa częstość:

$$\delta\omega_D \simeq 2\text{sgn}(\beta_2) \left[ \frac{zt}{L_D\tau_0^2} \right] + \dots \quad (z, t \ll 1) \quad (4.20)$$

gdzie  $L_D = \frac{\tau_0^2}{|\beta_2|}$  – charakterystyczna droga dyspersji.

Efekty samoistnej modulacji fazy będą więc kompensowały efekty wywołane przez dyspersję prędkości grupowej o ile  $\delta\omega_D \simeq \delta\omega_{NL}$ .

### 4.3 Nieliniowe równanie Schrodingera i solitony optyczne.

W poprzednim paragrafie pokazaliśmy, że przynajmniej wokół wierzchołka impulsu ( $t = 0$ ) efekty, zmiany chwilowej częstości impulsu wywołane przez dyspersję oraz przez samoistną modulację fazy mogą się wzajemnie kompensować. Ta kompensacja jest możliwa jedynie gdy  $\beta_2 < 0$ . Na rysunku pokazaliśmy wartości współczynnika załamania, odwrotność prędkości grupowej oraz  $\beta_2$  w funkcji długości fali dla szkła (fused silica). Warunek  $\beta_2 < 0$  jest spełniony dla długości fali  $\lambda > 1.3\mu m$ . Pokażemy, że w tym obszarze są możliwe rozwiązania równania (4.10), propagujące się bez zmiany kształtu. Oczywiście równanie (4.10) jest jedynie przybliżeniem pełnego równania propagacji.

Jeśli zapiszemy równanie propagacji w układzie poruszającym się z prędkością grupową wraz z impulsem:

$$i \frac{\partial}{\partial z} A = -\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A + \gamma |A|^2 A \quad (4.21)$$

oraz wprowadzimy unormowaną obwiednię impulsu  $U$ :  $A = A_0 U(z, t)$ , tak aby  $|U(0, 0)| = 1$ , a także wprowadzimy nową zmienną czasową  $\tau = \frac{t}{\tau_0}$  (czas mierzony w jednostkach długości trwania początkowego impulsu), a także skorzystamy z naszych definicji charakterystycznych dróg: nieliniowej oraz dyspersyjnej, możemy napisać równanie propagacji w formie:

$$i \frac{\partial}{\partial z} U = -\frac{1}{2L_{DS}} \text{sgn}(\beta_2) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} U + \frac{1}{L_{NL}} |U|^2 U, \quad (4.22)$$

gdzie:

$$L_{DS} = \frac{\tau_0^2}{\beta_2}$$

$$L_{NL} = \frac{1}{\gamma |A_0|^2} = \frac{1}{\gamma I_0}$$

W tym ostatnim równaniu  $I_0$  oznacza maksymalne natężenie impulsu,  $\tau_0$  oznacza początkowy czas trwania impulsu. Założymy dalej, że centralna długość fali impulsu leży w obszarze dyspersji anomalnej ( $\beta_2 < 0$ ) – (dla szkła  $\lambda \simeq 1.3\mu m$ , wówczas  $n_2 > 0$ , oraz  $\gamma = \frac{\omega_0 n_2}{c} > 0$ ). Wprowadzamy nową zmienną przestrzenną w kierunku propagacji impulsu  $\xi = \frac{z}{2L_D}$ , przyjmujemy  $L_{DF} = L_{NL}$  i otrzymujemy ostatecznie uniwersalne nieliniowe równanie Schrödingera

$$\left( i \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + |U|^2 \right) U = 0 \quad (4.23)$$

Poszukujemy rozwiązań tego równania w postaci  $U(\xi, \tau) = \Phi(\tau) \exp(ik\xi)$ . Oznacza to, że w czasie propagacji nie zmienia się kształt modułu obwiedni impulsu, jedynym efektem propagacji jest narastanie jednorodnej fazy.  $\Phi$  spełnia równanie:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Phi + k\Phi - \Phi^3 = 0 \quad (4.24)$$

Zażądamy dodatkowo, aby funkcja  $\Phi$  spełniała pewne warunki asymptotyczne:

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \Phi(\tau) = 0 \quad (4.25)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \tau} = 0 \quad (4.26)$$

Równanie (4.24) możemy zapisać w postaci różniczki zupełnej (pochodnej potencjału) w postaci:

$$\frac{d}{d\tau} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{1}{2} k \phi^2 + \frac{1}{4} \Phi^4 \right] = 0 \quad (4.27)$$

Całkując równanie (4.27) i korzystając z warunków asymptotycznych znajdujemy wyrażenie na kwadrat pochodnej  $\Phi$ :

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right)^2 = \Phi^2 (2k - \Phi^2) \quad (4.28)$$

co można zapisać jako:

$$\int \frac{d\Phi}{\Phi \sqrt{2k - \Phi^2}} = y \quad (4.29)$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja hiperboliczna<sup>1</sup>:  $\Phi(y) = \frac{\sqrt{2k}}{\cosh(2ky)}$ , a zatem:

$$U(z, t) = \frac{\sqrt{2k}}{\cosh(2kt)} e^{ikz} \quad (4.30)$$

Jeśli teraz przypomnimy sobie wszystkie przekształcenia, które doprowadziły nas do wzoru (4.30), to otrzymamy ostatecznie:

$$U(z, t) = \frac{ck}{3\pi\omega v_g \chi^{(3)}} \cosh^{-1} \left[ \frac{1}{v_g} \left( \frac{2k}{|\beta_2|} \right)^{\frac{1}{2}} (z - v_g t) \right] \exp(ikz) \quad (4.31)$$

Inne solitony:

$$U(z, t) = \exp \left( i\lambda t + \frac{i}{2} \lambda^2 z \right) U_0(t - \lambda z, z) \quad (4.32)$$

jeśli położyć  $\lambda = \mu^{-1/2}$ . Rozwiązania wielosolitonowe. wyjaśnić

## 4.4 Samoistne wyostrezanie się impulsów i samoistne przesunięcie częstotliwości.

Impulsy o krótkich czasach trwania (w zakresie femtosekundowym) mają szerokie widmo co powoduje konieczność uwzględnienia dodatkowych wyrazów w nieliniowym równaniu Schrodingera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} + \\ -i\gamma |A|^2 A + \frac{\gamma}{\omega_0} \frac{\partial |A|^2 A}{\partial t} + i\gamma \tau_R \frac{\partial |A|^2}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

<sup>1</sup>Korzystamy ze wzoru:  $\int \frac{d\Phi}{\Phi \sqrt{2k - \Phi^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2k}} \ln \left( \frac{\sqrt{2k} - \sqrt{2k - \Phi^2}}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k - \Phi^2}} \right)$

gdzie  $\tau_R$  to charakterystyczny czas wzmocnienia ramanowskiego (zwykle rzędu  $5fs$ ). Jest to parametr, który należy dobrać *wyjaśnić*. Dwa ostatnie, dodatkowe wyrazy prowadzą do nowych zjawisk. Pierwszym z nich jest samoistne wyostanie się impulsu (self-steepening), za które odpowiedzialny jest przedostatni wyraz w równaniu (4.33). Efekt wiąże się z zależnością prędkości grupowej od natężenia, co prowadzi do różnic w prędkości propagacji szczytu impulsu i jego zboczy i zmian kształtu obwiedni. Aby dokładnie przeanalizować to zjawisko uprościmy przedstawioną wyżej postać NLSE. Podobnie jak w przypadku samoistnej modulacji fazy propagację impulsu będziemy opisywali w układzie poruszającym się wraz z impulsem, wprowadzając czas retardowany:  $t_{ret} = t - z/v_g$ . Pominie my też dyspersję trzeciego rzędu, efekty dyfrakcyjne i ramanowskie (pominie my ostatni wyraz w równaniu (4.33)), i wprowadzimy bezwymiarowe zmienne:

$\tau = \frac{t_{ret}}{\tau_0}$  przeskalowany czas retardowany

$A = \sqrt{P_0}U$  znormalizowana amplituda

gdzie:

$\tau_0$  – początkowy czas trwania impulsu

$I_0$  – maksymalny początkowy kwadrat amplitudy (czasami bedziemy go nazywać natężeniem)

W tych nowych zmiennych równanie (4.33) przybiera postać:

$$i \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{sgn\beta_2}{2L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \frac{1}{L_{NL}} \left( |U|^2 U + iS \frac{\partial |U|^2 U}{\partial \tau} \right) = 0 \quad (4.34)$$

gdzie:

$L_{DS} = \frac{\tau_0^2}{|\beta_2|}$  długość, na której ujawniają się efekty dyspersyjne

$L_{NL} = \frac{1}{\gamma I_0}$  długość, na której ujawniają się efekty nieliniowe

$S$  - parametr wiążący się z przeskalowaniem:  $S = \frac{1}{\omega_0 \tau_0} = \frac{\tau_{opt}}{2\pi \tau_0}$ ,  $\tau_{opt} = 2fs$  dla światła widzialnego, jest równe okresowi drgań pola fali optycznej ( $\frac{2\pi}{\omega_0}$ ) i  $S$  jest na ogół bardzo małym parametrem (dla impulsu o czasie trwania  $15fs$ ,  $S \simeq 0.01$ ). Aby zilustrować efekt samoistnego wyostania się impulsu ucieknijmy się po raz kolejny do drastycznego uproszczenia, polegającego na pominięciu dyspersji. Na końcu tego paragrafu zaprezentujemy wyniki symulacji numerycznych otrzymanych z równoczesnym uwzględnieniem wszystkich zjawisk - dyspersji, samoistnej modulacji fazy, samoistnego wyostania się impulsu i samoistnego przesunięcia częstości. Niestety rezultaty numeryczne nie dają tak dobrego pojęcia o mechanizmach powstawania zjawisk, jakie (nawet) uproszczone rozwiązania analityczne.

Jeśli ograniczyć się do równania

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{L_{NL}} \left( |U|^2 U + iS \frac{\partial (|U|^2 U)}{\partial \tau} \right) = 0 \quad (4.35)$$

i rozłożyć  $U$  na amplitudę i fazę  $U = \sqrt{I} \exp(i\phi)$  otrzymamy układ dwóch równań:

$$\frac{\partial I}{\partial z} + 3SI \frac{\partial I}{\partial \tau} = 0 \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + SI \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = I \quad (4.37)$$



Zauważmy, że w pierwszym z tych równań występuje jedynie natężenie, a nie występuje faza. Jest to proste równanie różniczkowe cząstkowe i można je rozwiązać np. metodą charakterystyk *opowiedzieć o metodzie charakterystyk*. Otrzymamy wówczas ogólne rozwiązanie w postaci;

$$I(z, t) = f(t - 3\gamma I(z, t), z) \quad (4.38)$$

z warunkiem początkowym  $I(0, t) = f(t)$  opisującym kształt impulsu wchodzącego do ośrodka nieliniowego. Oczywiście konkretny kształt impulsu w ośrodku będzie zależał od kształtu impulsu początkowego i aby go znaleźć należy rozwiązać nieliniowe równanie. Na rysunku pokazaliśmy przykładowe krzywe dla przypadku, gdy początkowy impuls miał kształt gaussowski. Jak widać impuls staje się asymetryczny, a jego maksimum przesuwa się w stronę późniejszych czasów. W rezultacie 'strona rufowa' impulsu staje się coraz bardziej stroma i może dojść do załamania ogona impulsu. Efekt ten przypomina załamywanie się fal morskich, z tą jednak różnicą, że fale morskie załamują się w kierunku frontu falowego, a nie ogona. Z drugiej strony powinniśmy pamiętać o naszym drastycznym przybliżeniu polegającym na pominięciu dyspersji. Dyspersja, jak pokazują nasze symulacje numeryczne bardzo osłabia efekt załamywania się fali. Mechanizmy powstawania samoistnego wyostrażania się impulsu mogą doprowadzić do efektu 'optycznego szoku', efektu bardzo podobnego do 'szoku akustycznego' powstającego w falach dźwiękowych. Z naszego prostego modelu możemy obliczyć długość drogi krytycznej, po której ten 'szok' nastąpi. Tę długość znajdziemy z warunku  $\frac{\partial I}{\partial t} \rightarrow \infty$ . Jeśli znowu odwołać się do przykładu impulsu Gaussowskiego (na wejściu), tzn.  $f(\tau) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^2\right]$ , długość drogi krytycznej wynosi  $z_{crit} = \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}}\frac{L_{NL}}{3S} \simeq 0.39\frac{L_{NL}}{S}$ . Wynik ten słabo zależy od kształtu początkowego impulsu, na przykład w przypadku impulsu o kształcie sekansa hiperbolicznego otrzymalibyśmy 0.43 zamiast 0.39. Proste oszacowanie pozwala nam stwierdzić, że impuls pikosekundowy o mocy 1W załamuje się po przebyciu ok. 100km, ale w przypadku impulsów femtosekundowych długość drogi krytycznej maleje do około 1m.

Innym efektem obserwowanym podczas propagacji krótkich impulsów w ośrodkach o zależnym od natężenia współczynniku załamania jest tak zwane samoistne przesunięcie częstości (self- frequency shift), opisywane jest przez ostatni człon równania (15). Efekt ten ujawnia się dla krótkich impulsów, obdarzonych szerokim widmem. Impuls taki propagując się w ośrodku o szerokim paśmie wzmocnienia ramanowskiego przekazuje poprzez efekt Ramana część energii odpowiadającą swoim składowym o wysokiej częstotliwości do składowych o niskich częstotliwościach. W efekcie widmo impulsu przesuwa się w stronę większych długości fali.

## 4.5 Samoogniskowanie i autokolimacja

W odróżnieniu od zjawisk opisanych wcześniej, samo-ogniskowanie jest efektem przestrzennym, nie nadającym się do opisu w ramach prostego modelu jednowymiarowego. W szczególności konieczne jest tutaj uwzględnienie rozkładu amplitudy pola elektrycznego fali elektromagnetycznej w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku propagacji. Dodatkowej modyfikacji ulec musi również NLSE, które należy uzupełnić o opis zjawisk dyfrakcyjnych. Poniżej przedstawimy trzy modele opisujące zjawisko autokolimacji. Pier-

wszy z nich będzie opierał się na rozważaniach z zakresu optyki geometrycznej i choć jest bardzo poglądowy, nie oddaje naszym zdaniem istoty zjawiska, ponieważ za występowanie tego zjawiska są odpowiedzialne relacje fazowe impulsu. Dlatego, w uzupełnieniu podajemy jeszcze modele opierające się na analizie równania propagacji (NLSE).

Rozważmy silną wiązkę laserową o gaussowskim rozkładzie natężenia padającą na ośrodek, którego współczynnik załamania zależy od natężenia (7). Jeżeli dodatkowo dla rozpatrywanego ośrodka  $n_2 > 0$ , to dla rozważanej wiązki gaussowskiej współczynnik załamania będzie największy na jej osi. Oznacza to, że opóźnienie fazowe promieni (fal) na jej osi jest największe (rys 1).

Taki rozkład współczynnika załamania powoduje samoogniskowanie światła - ośrodek działa jak soczewka o dodatniej ogniskowej. W zależności od długości ośrodka ognisko może znaleźć się poza nim (rys. 2a), jak i w jego wnętrzu (rys. 2b). W ty drugim przypadku może to doprowadzić do spalenia materiału.

Procesem konkurencyjnym do samo-ogniskowania jest dyfrakcja w ośrodku. Pod jej wpływem wiązka ulega przestrzennemu rozszerzeniu. Dokładna wzajemna kompensacja dyfrakcji i samoogniskowania prowadzi do zjawiska zwanego autokolimacją światła (self-trapping).

Zaprezentujemy teraz pierwszy z naszych prostych modeli ilustrujący zjawisko samoogniskowania. Zbadamy zachowanie się wiązki promieni o rozmiarze poprzecznym  $d$  i o przestrzennym rozkładzie natężenia takim jak pokazano na rysunku 4.

Rozpatrzmy bieg promieni załamujących się na granicy ośrodków 1 i 2. Aby dyfrakcja, z której wynika rozrzut kątowy promieni została skompensowana, promienie muszą ulegać całkowitemu wewnętrznemu odbiciu. Daje to warunek na kąt  $\theta$ :

$$\cos(\theta_0) = \frac{n}{\delta n + n} \quad (4.39)$$

który dla małych wartości kątów  $\theta$  i małego  $\delta n$  można zapisać jako:

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{2\delta n}{n}} \quad (4.40)$$

Maksymalną rozbieżność promieni w wiązce można oszacować opierając się na zależności:

$$\theta_d = \frac{0.61\lambda}{nd} \quad (4.41)$$

która opisuje pierwsze minimum dyfrakcyjne powstałe w wyniku dyfrakcji na szczelinie o średnicy równej średnicy wiązki. Porównując (4.40) i (4.41):

$$d = \frac{0.61\lambda}{\sqrt{2n_0\delta n}} = \frac{0.61\lambda}{\sqrt{2n_0n_2I}} \quad (4.42)$$

Wykorzystując zależność mocy wiązki od jej średnicy i natężenia uzyskać możemy z (4.42) pewną krytyczną wartość mocy, dla której zachodzi autokolimacja promieniowania:

$$P_{kryt} = \frac{(0.61)^2\pi}{8n_0n_2}\lambda^2 \quad (4.43)$$

Dla mocy większych od  $P_{kryt}$  będziemy mieli do czynienia z samoogniskowaniem.

Dla porównania przedstawimy inny model zjawiska samoogniskowania, tym razem opisujący zachowanie się wiązki gaussowskiej przechodzącej przez ośrodek o współczynniku załamania zależnym od natężenia fali świetlnej. Używane przez nas w dalszych rozważaniach parametry wiązki definiuje poniższy rysunek:

Wprowadzimy parametr kątowy opisujący stopień zbieżności rozważanej wiązki gaussowskiej:  $\theta = \frac{2z_{min}}{kw_0^2}$ . Wykorzystując go możemy zapisać w następującej postaci amplitudę pola elektromagnetycznego na powierzchni ośrodka nieliniowego ( $z = 0$ ):

$$A(x, y, 0) = A_0 \exp \left[ -\frac{r^2}{d^2} (1 - i\theta) \right] \quad (4.44)$$

Wartości  $\theta > 0$  odpowiadają dodatnim wartością  $z_{min}$ , a więc wiązce która na wejściu do ośrodka jest zbieżna. Analogicznie można uzasadnić, że  $\theta < 0$  odpowiadają wiązce rozbieżnej. Propagacją wiązki wewnątrz materiału nieliniowego rozważać będziemy opierając się o NLSE, w którym pominiemy efekty dyspersyjne. Pozostawimy natomiast człony odpowiedzialne za dyfrakcję:

$$\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{i}{2} \gamma_{xx} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) - i\gamma |A|^2 A = 0 \quad (4.45)$$

gdzie:

$\gamma_{xx} = \frac{c}{n(\omega_0)\omega}$  jest członem odpowiadającym za efekty dyfrakcyjne.

Równanie falowe tej postaci da się rozwiązać jedynie numerycznie. Pewne informacje na temat propagacji wiązki gaussowskiej uzyskać jednak możemy analizując jej zachowanie blisko płaszczyzny wejściowej ośrodka nieliniowego. Korzystając z równania (4.45) możemy wyrazić pochodne  $\frac{\partial^n |A|^2}{\partial z^n}$  poprzez pochodne amplitudy w kierunkach  $x$  i  $y$ . Przykładowo:

$$\frac{\partial |A|^2}{\partial z} = \frac{i}{2k} \left( A \nabla_T^2 A^* - A^* \nabla_T^2 A \right) \quad (4.46)$$

gdzie :  $\nabla_T^2 = \nabla_x^2 + \nabla_y^2$ .

Dysponując wyznaczonymi w ten sposób pochodnymi, natężenia pola i podstawiając za  $A(x, y, z)$  wartość amplitudy w  $z = 0$  (4.44) dokonać możemy rozwinięcia natężenia wiązki w szereg potęgowy wokół  $z = 0$ . Z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu dostajemy:

$$|A(x = y = 0, z)|^2 \simeq A_0^2 \left( 1 + 4\theta \frac{z}{kd^2} \right) \quad (4.47)$$

Odwrotność tak oszacowanego natężenia możemy potraktować jako bardzo zgrubne przybliżenie pola przekroju wiązki. Znowu wykorzystamy rozwinięcie Taylora i ograniczymy się do czynników pierwszego rzędu, aby otrzymać:

$$a(z) \simeq |A(x = y = 0, z)|^{-2} \simeq a(0) \left( 1 - 4\theta \frac{z}{kd^2} \right) \quad (4.48)$$

Spróbujmy określić teraz głębokość na jakiej dojdzie do zogniskowania wiązki. Można przyjąć, że sytuacji tej odpowiadać będzie pole przekroju wiązki równe zero. Można stąd

wyprowadzić następujący wzór na głębokość zogniskowania  $z_f$ :

$$z_f = \frac{kd^2}{2} \left( \sqrt{\frac{P}{P_c}} - 1 + \theta \right)^{-1} \quad (4.49)$$

gdzie:

$P = \frac{\pi d^2 n_0 c}{4\pi} A_0^2$  jest mocą wejściową wiązki

$P_c = \frac{\lambda^2}{8\pi n_2 n_0}$  jest pewną mocą krytyczną.

Z powyższego równania wynika, że dla wiązki zbieżnej ( $\theta > 0$ ) o mocy większej od  $P_c$  będziemy mieli zawsze do czynienia z samoogniskowaniem. Co więcej, do zogniskowania dojdzie wtedy bez względu na wartość początkowych parametrów  $d$  i  $\theta$ . Inaczej jest w przypadku wiązek początkowo rozbieżnych ( $\theta < 0$ ). Warunek wyznaczający minimalną moc gwarantującą samoogniskowanie wiązki ma w tym przypadku postać:

$$P(\theta < 0) = P_c(1 + \theta^2) \quad (4.50)$$

Dopiero moce wiązki większe od danej powyższym równaniem zapewniają, że  $z_f$  będzie dodatnie, a więc, że ognisko znajdzie się wewnątrz ośrodka nieliniowego.

Na zakończenie zauważmy, że oszacowanie mocy krytycznej prowadzącej do samoogniskowania możemy otrzymać też porównując w równaniu propagacji różne drogi charakterystyczne dyfrakcji i nieliniowości. Przepisując równanie (4.45) w zmiennych bezwymiarowych:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = i \frac{w^2}{L_{DF}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - \frac{i}{L_{NL}} |U|^2 U \quad (4.51)$$

gdzie:  $L_{DF} = \frac{w^2}{2\gamma_{xx}} = \pi \frac{w_0^2}{\lambda}$  długość na której ujawniają się efekty dyfrakcyjne. Pozostałe wielkości zdefiniowano w (16).

Wprowadzone w ten sposób  $L_{DF}$  pozwala oszacować długość propagacji na której istotna staje się dyfrakcja fali elektromagnetycznej w ośrodku. Samoogniskowanie wiązki nastąpić może jedynie w sytuacji, gdy efekty nieliniowe (ogniskujące) będą silniejsze od efektów dyfrakcyjnych, a więc gdy  $L_{NL} < L_{DF}$ . Równość obu parametrów odpowiada autokolimacji wiązki. Ponieważ  $L_{NL}$  zależy od początkowej mocy fali elektromagnetycznej (16) równość  $L_{NL} = L_{DF}$  jest również warunkiem na pewną krytyczną moc wiązki, dla których dojść może do jej autokolimacji. Ostatecznie:

$$P_c \simeq \frac{\lambda^2}{nn_2} \quad (4.52)$$

Wszystkie powyższe trzy oszacowania mocy krytycznej są ze sobą zgodne zarówno co do rzędu wielkości jak i postaci zależności od długości fali i parametrów materiałowych.

Powyższe rozważania warto zilustrować przykładem liczbowym. Dla dwusiarczku węgla  $\text{CS}_2$   $n_0$  równy jest 1.7. Nieliniowy współczynnik załamania  $n_2$  dla światła spolaryzowanego liniowo wynosi dla tej substancji  $2.6 \cdot 10^{-14} \text{cm}^2/\text{W}$ . Przyjmując długość fali świetlnej  $\lambda = 1 \mu\text{m}$  dostaniemy oszacowanie mocy krytycznej  $P_c = 10^4 \text{W}$ .

Napisać o różnego rodzaju nieliniowościach oraz charakterystycznych czasach tych nieliniowości. Na przykład impuls femtosekundowy widzi tylko część nieliniowości.

## 4.6 Metody numerycznego rozwiązywania równania propagacji. Metoda split-step.

W tym paragrafie opiszemy numeryczny algorytm powszechnie stosowany do symulacji procesu propagacji impulsów świetlnych w ośrodkach dyspersyjnych. Nie jest to jedyna metoda stosowana w tego typu zagadnieniach, niekoniecznie też jest ona zawsze optymalna pod względem szybkości obliczeń. Jej podstawową zaletą jest stabilność oraz uniwersalność. W literaturze metoda ta występuje pod nazwą się split-step, bądź beam-propagation method. Przypomnijmy, że równania które będziemy tą metodą rozwiązywać mają postać:

$$i \frac{\partial}{\partial z} A(x, y, z, t) = \hat{\Lambda} A(x, y, z, t) + \hat{N}(A) A(x, y, z, t) \quad (4.53)$$

gdzie  $\hat{\Lambda}$  jest liniowym operatorem różniczkowym, zawierającym pochodne względem  $x, y, t$ , natomiast  $\hat{N}(A)$  jest operatorem nieliniowym, który jest funkcją  $A(x, y, z, t)$ . Możemy teraz formalnie scałkować równanie (4.53) i otrzymamy:

$$A(x, y, z + \Delta z, t) = \exp \left[ -i \left( \hat{\Lambda} + \hat{N}(A) \right) \Delta z \right] A(x, y, z, t) \quad (4.54)$$

Wzór (4.54) należy rozumieć jako przepis na obliczenie wartości funkcji  $A$  w punkcie  $z + \Delta z$ , czyli propagację naszego rozwiązania o mały krok  $\Delta z$ . Ponieważ operatory  $\hat{\Lambda}$  oraz  $\hat{N}(A)$  nie komutują, należałoby więc zastosować wzór:

$$\begin{aligned} \exp \left[ -i \left( \hat{\Lambda} + \hat{N}(A) \right) \Delta z \right] &= \exp \left( -i \hat{\Lambda} \Delta z \right) \exp \left( -i \hat{N}(A) \Delta z \right) \times \\ &\times \exp \left\{ \left[ \hat{\Lambda}, \hat{N}(A) \right] (\Delta z)^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.55)$$

W argumencie ostatniej funkcji  $\exp$  napisaliśmy komutator obu operatorów liniowego i nieliniowego. Zauważmy, że ostatni wyraz jest proporcjonalny do  $(\Delta z)^2$ , a zatem dla bardzo  $\Delta z$  małych można go zaniedbać. W ten sposób otrzymaliśmy przepis split-step. Zgodnie z tym przepisem aby otrzymać  $A(x, y, z + \Delta z, t)$  należy na  $A(x, y, z, t)$  podzielać kolejno operatorami  $\exp \left( -i \hat{\Lambda} \Delta z \right)$  oraz  $\exp \left( -i \hat{N}(A) \Delta z \right)$ .



## Rozdział 5

# Procesy drugiego rzędu

*W rozdziale tym skupimy się na opisie zjawisk związanych z wyrazami polaryzacji nieliniowej proporcjonalnymi do drugiej potęgi pola elektrycznego fali elektromagnetycznej oddziałującej z ośrodkiem. Wprowadzimy sprzężony układ równań opisujący równoczesną propagację impulsów o różnych częstościach.*

### 5.1 Sprzężone równania propagacji

Do tej pory rozważaliśmy przykłady, w których występowała tylko jedna częstość centralna. Nawet w procesach samoogniskowania, bądź samoistnej samoindukcji fazy, gdzie należy uwzględnić wpływ nieliniowej polaryzacji, wszystkie składowe mają tę samą częstość centralną i tę samą częstość ma również polaryzacja wypadkowa. W tym wykładzie uogólnimy nasze rozważania na przypadek, kiedy musimy uwzględnić kilka różnych częstości centralnych. Zastosujemy przybliżenie wolno zmiennych obwiedni (proszę zwrócić uwagę na liczbę mnogą w tej nazwie!).

Rozpocznijmy od równania falowego, które wyprowadziliśmy na wykładzie pierwszym:

$$-\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{P}_L + \vec{P}_{NL}) \quad (5.1)$$

Po prawej stronie równania (5.1) występuje polaryzacja liniowa  $P_L$ , oraz polaryzacja nieliniowa  $P_{NL}$ . Zapiszemy teraz wektor natężenia pola elektrycznego jako sumę składowych o centralnych częstościach  $\omega_j$  i wektorach falowych (będziemy w naszym wykładzie ograniczali się do przypadku propagacji kolinearnej, to znaczy takiej w której centralne wektory falowe wszystkich paczek falowych są do siebie równoległe); czyli:

$$\vec{E} = \sum \vec{A}_j \exp(ik_j z - i\omega_j t) = \sum \vec{E}_j \quad (5.2)$$

gdzie  $A_j$  stanowią wolno zmienne obwiednie. Wolna zmienność odnosi się tu tak jak poprzednio, do czynnika fazowego  $\exp(ik_j z - i\omega_j t)$ . Następnie postawmy ten rozkład do równania (5.1) i zauważmy, że po tym podstawieniu rozpadnie się ono na kilka kawałków, które oscylują z różnymi częstościami. Aby równanie (5.1) było spełnione w każdej chwili czasu suma współczynników mnożących czynniki fazowe oscylujące z różnymi częstościami musi być tożsamościowo równa zeru. A zatem nasze pojedyncze równanie

(5.1) sprowadza się do kilku niezależnych równań:

$$-\nabla \times \nabla \times \vec{E}_j + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_j}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}_L(\vec{E}_j) = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}_{NL,j} \quad (5.3)$$

gdzie  $P_L(\vec{E}_j)$  oznacza polaryzację liniową utworzoną jedynie ze składowych o centralnej częstości  $\omega_j$ , a  $P_{NL,j}$  część polaryzacji nieliniowej oscylująca wokół tejże właśnie częstości. Aby nasze rozumowanie było poprawne musimy założyć, że rozkład częstości w każdym z impulsów jest wąski w porównaniu z dowolną interesującą nas kombinacją częstości  $\omega_j \pm \omega_i$  (przybliżenie dobrze rozdzielonych częstości). Jak się przekonamy to założenie ma pewne istotne konsekwencje kiedy rozważamy generację drugiej harmonicznej jako przypadek graniczny generacji sumy częstości. W tym miejscu chcielibyśmy zakończyć rozważania ogólne i zamiast zachowania ogólności za cenę dużej komplikacji formalnej, pokażemy działanie naszego przybliżenia w przypadkach konkretnych procesów fizycznych. Jesteśmy pewni, że uważny czytelnik będzie w stanie po rozważeniu tych przykładów zrozumieć ogólne prawa i będzie w stanie samodzielnie wyprowadzić odpowiedni układ równań sprzężonych dla dowolnego procesu. Rozpoczniemy od przykładu generacji sumy częstości.

## 5.2 Generacja sumy częstości

Nasze ogólne rozważania zastosujemy teraz do przypadku generacji sumy częstości. W tym przypadku nieliniowa polaryzacja jest proporcjonalna do drugiej potęgi natężenia pola. Uczynimy teraz przybliżenie wolno zmiennych obwiedni. Założymy, że obwiednię pola elektromagnetycznego możemy rozbić na szereg obwiedni o różnych częstościach centralnych  $\omega_j$  ( $\omega_j$  przyjmuje jedną z trzech wartości  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ) i odpowiadających im centralnym wektorom falowym  $k_j$ , czyli  $\vec{E} = \sum \vec{A}_j \exp(ik_j z - i\omega_j t)$  (rozważamy propagację kolinearną). Po podstawieniu powyższego rozkładu do równania falowego otrzymujemy układ trzech sprzężonych równań na obwiednie pól o częstościach centralnych  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Prześledzimy to na przykładzie równania na obwiednię  $A_3$ . Jeśli w równaniu (5.3) położymy  $j = 3$  i dobierzemy czynniki występujące w polaryzacji nieliniowej tak, aby jej częstość centralna była równa  $\omega_3$ , a następnie założymy, że czas trwania impulsu jest na tyle długi, że możemy pominąć pochodne czasowe obwiedni to po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_3 + \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2ik_3 \frac{\partial}{\partial z} - k_3^2 + \frac{n^2 \omega_3^2}{c^2} + \Delta_{\perp} \right] A_3 = \\ = -\frac{4\pi \omega_3^2}{c^2} \chi_{eff} A_1 A_2 \exp(i(k_1 + k_2)z) \exp(-i(\omega_1 + \omega_2)t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Wprowadzimy teraz przybliżenie wolno zmiennej obwiedni, zaniedbując wyraz zawierający drugą pochodną w kierunku propagacji, zaniedbamy wyraz  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_3$  (nie jest to bardzo przejrzyste przybliżenie) oraz po lewej stronie równania pozostawimy tylko wyraz z pierwszą pochodną, otrzymując ostatecznie:

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} = \frac{i}{2k_3} \Delta_{\perp} A_3 + \frac{4\pi \omega_3^2 i}{2k_3 c^2} \chi_{eff} A_1 A_2 \exp[i(k_1 + k_2 - k_3)z] \quad (5.5)$$



Pełniejsze i bardziej ściśle wyprowadzenie równania propagacji staje się bardzo złożone<sup>1</sup>. Dwa pozostałe równania, na obwiednie  $A_1$  i  $A_2$  mają podobną strukturę. W dalszej części wykładu założymy, że nasze paczki falowe - impulsy są słabo zlokalizowane nie tylko w czasie ale również i przestrzeni. Możemy wówczas pominąć po prawej stronie równania (5.27) wszystkie wyrazy z pochodnymi czasowymi i przestrzennymi i układ równań na nasze obwiednie redukuje się do:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_3}{\partial z} &= \frac{i\varepsilon_0\omega_3^2}{2k_3c^2}\chi_{eff}A_1A_2\exp(i\Delta kz) \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} &= \frac{i\varepsilon_0\omega_2^2}{2k_2c^2}\chi_{eff}A_3A_1^*\exp(-i\Delta kz) \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} &= \frac{i\varepsilon_0\omega_1^2}{2k_1c^2}\chi_{eff}A_3A_2^*\exp(-i\Delta kz)\end{aligned}\quad (5.6)$$

gdzie wprowadziliśmy wektor niedopasowania fazowego  $\Delta k = k_2 + k_1 - k_3$ . Zauważmy, że aby otrzymać równania (5.6) w takiej postaci musieliśmy pominąć straty wynikające z pochłaniania energii impulsów przez ośrodek, w którym się one propagują, pominieliśmy również różnice prędkości grupowych oraz wszelkie inne efekty czasowe (impuls musi być bardzo długi) i przestrzenne, w kierunku prostopadłym do kierunku propagacji (impuls nie może być silnie zogniskowany), i zaniedbaliśmy efekty wektorowe, wprowadzając jedną stałą  $\chi_{eff}$ . Jak zwykle jest to cena, którą przychodzi nam zapłacić, aby znaleźć proste analityczne rozwiązanie, pozwalające prześledzić podstawowe własności zjawiska.

Rozważmy teraz problem jednoczesnej propagacji trzech impulsów w ośrodku z nieliniowością drugiego rzędu. Zakładamy, że ośrodek ma długość  $L$ , a równania opisujące zachowanie poszczególnych obwiedni są właśnie równaniami (5.6). Opisywaną sytuację fizyczną ilustruje rysunek (). Równania można rozwiązać ściśle w najogólniejszym przypadku, to znaczy dla jakichkolwiek warunków początkowych  $A_1$ ,  $A_2$  oraz  $A_3$ , jednak w tym najogólniejszym przypadku wyrażają się one poprzez eliptyczne funkcje Jakobiego. Te rozwiązania można znaleźć w pracy *Armstronga et al. (1962)*. W naszych obecnych rozważaniach ograniczymy się do szczególnego przypadku, a mianowicie założymy, że jedna z obwiedni opisuje bardzo silną falę, tak silną, że można zaniedbać zmianę jej amplitudy podczas propagacji w naszym nieliniowym ośrodku. Niech tą silną falą będzie dla ustalenia uwagi fala o centralnej częstotliwości  $\omega_2$ . Położymy zatem  $A_2 = \text{const}$ , i zredukujemy nasz układ równań (5.6) do dwóch równań:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_3}{\partial z} &= K_3A_1\exp(i\Delta kz) \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} &= K_1A_3\exp(-i\Delta kz)\end{aligned}\quad (5.7)$$

<sup>1</sup>W ogólnym przypadku można pokazać, że równanie propagacji przybiera postać:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_3}{\partial z} &= -\beta_{31}\frac{\partial A_3}{\partial t} - \gamma_3\frac{\partial A_3}{\partial x} - i\frac{\beta_{32}}{2}\frac{\partial^2 A_3}{\partial t^2} + i\frac{\gamma_{3xx}}{2}\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} + i\frac{\gamma_{3yy}}{2}\frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} + \\ &+ \frac{4\pi\omega_3^2 i}{2k_3c^2}\chi_{eff}A_1A_2\exp[i(k_1 + k_2 - k_3)z]\end{aligned}$$

gdzie wprowadziliśmy dla uproszczenia dwie stałe:  $K_1 = \frac{2\pi i \omega_1^2 \chi_{eff}}{k_1 c^2} A_2^*$  oraz  $K_3 = \frac{2\pi i \omega_3^2 \chi_{eff}}{k_3 c^2} A_2$ . Rozwiązanie układu równań (5.6) przybiera szczególnie prostą postać, jeśli założymy przypadek idealnego dopasowania fazowego  $\Delta k = 0$ . Rzeczywiście, w tym przypadku różniczkując drugie z powyższych równań i podstawiając doń pierwsze, otrzymujemy równanie zawierające jedynie  $A_1$ :

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} = K_3 K_1 A_1 = -\frac{4\pi^2 \omega_1^2 \omega_3^2 |A_2|^2 \chi_{eff}^2}{k_1 k_3 c^4} A_1 = -\kappa^2 A_1 \quad (5.8)$$

a obwiednię  $A_3$  otrzymamy natychmiast z warunku  $A_3 = \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{1}{K_1}$ . Teraz już bez straty ogólności możemy wybrać "wygodne" warunki początkowe, tzn.  $A_1(0) = A$  oraz  $A_3(0) = 0$ , i ostatecznie:

$$A_1 = A \cos(\kappa z) \quad (5.9)$$

$$A_3 = -A \frac{\kappa}{K_1} \sin(\kappa z)$$

Moduły obwiedni  $|A_1|$  i  $|A_3|$  przedstawiliśmy na rysunku (). Jak widzimy podstawową cechą tych rozwiązań jest przelewanie się pomiędzy impulsem o częstości centralnej  $\omega_1$  oraz impulsem sumy harmonicznym, przy czym możliwa jest pełna konwersja natężenia. Uzbrojeni w powyższe doświadczenie możemy teraz rozwiązać problem generacji sumy częstości w przypadku braku pełnego dopasowania fazowego, tzn. gdy  $\Delta k \neq 0$ . Założymy mianowicie, że rozwiązania na obwiednie  $A_1$  i  $A_3$  są w postaci:

$$A_1(z) = (B \exp(igz) + C \exp(-igz)) \exp(-i\Delta k z/2) \quad (5.10)$$

$$A_3(z) = (F \exp(igz) + G \exp(-igz)) \exp(i\Delta k z/2) \quad (5.11)$$

przy czym  $g = g(\Delta k)$ , jest funkcją parametru niedopasowania fazowego. Podstawiając te zaproponowane rozwiązania do równań (5.7) i porównując wyrazy przy  $\exp(igz)$  oraz  $\exp(-igz)$  otrzymujemy układ dwóch równań liniowych wiążących współczynniki  $B, C$  z  $F, G$ . Równania te muszą być liniowo zależne (znikanie wyznacznika równania wiekowego) co daje nam warunek na  $g$ , a mianowicie  $g^2 = -K_1 K_3 + 1/4(\Delta k)^2$ , przy czym wystarczy wziąć jedno z rozwiązań tego równania, ponieważ w naszym 'próbny' rozwiązaniu występują zarówno  $\exp(igz)$  jak i  $\exp(-igz)$ . Teraz już tylko musimy rozwiązać układ równań liniowych aby znaleźć współczynniki  $B, C, F, G$  zgodne z wybranymi warunkami początkowymi. W przypadku analogicznym do (5.9) otrzymamy wówczas:

$$A_1(z) = A \cdot \left( \cos(gz) + \sin(gz) \frac{i\Delta k}{2g} \right) \cdot \exp\left(-\frac{i}{2}\Delta k z\right) \quad (5.12)$$

$$A_3(z) = A \frac{K_3}{g} \sin(\kappa z) \cdot \exp\left(\frac{i}{2}\Delta k z\right) \quad (5.13)$$

natomiast w ogólnym przypadku, kiedy na wejściu do ośrodka składowa o częstości centralnej  $\omega_3$  ma niezerową amplitudę

$$A_1(z) = \left( A_1(0) \cos(gz) + A_1(0) \sin(gz) \frac{i\Delta k}{2g} + A_3(0) \frac{K_1}{g} \sin(gz) \right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{i}{2}\Delta kz\right) \quad (5.14)$$

$$A_3(z) = \left( A_1(0) \frac{K_3}{g} \sin(gz) - A_3(0) \frac{i\Delta k}{g} \sin(gz) + A_3(0) \cos(gz) \right) \cdot \exp\left(-\frac{i}{2}\Delta kz\right) \quad (5.15)$$

Na rysunku () przedstawiono dwie krzywe przedstawiające  $|A_3(z)|^2 = |A_1(0)|^2 \frac{K_3^2}{g^2} \sin^2(gz)$  odpowiadające rozwiązaniom z  $\Delta k = 0$  oraz  $\Delta k = 4\kappa$  w przypadku, gdy  $A_3(0) = 0$ . Efektywność generacji nowej harmonicznej szybko maleje wraz ze wzrostem  $|\Delta k|$ .

### 5.3 Generacja różnicy częstotliwości

Rozważmy teraz konfigurację w której dopasowanie fazowe w ośrodku faworyzuje generację fali o częstotliwości równej różnicy częstotliwości fal wchodzących do ośrodka. W tym wypadku będziemy rozważali jednoczesną propagację impulsów o częstotliwościach  $\omega_1$ ,  $\omega_3$  oraz  $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ . Analogicznie jak w przypadku generacji sumy częstotliwości ograniczymy się do szczególnego przypadku, gdy jedna z fal padających o częstotliwości  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  będzie bardzo silna i w konsekwencji zaniedbamy zmiany jej amplitudy. Sprzężone równania na obwiednie fal o częstotliwościach  $\omega_1$  oraz  $\omega_2$  będą miały postać:

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{2\pi i \omega_1 \chi_{eff}}{k_1 c^2} A_3 A_2^* \exp(i\Delta kz) \quad (5.16)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{2\pi i \omega_2 \chi_{eff}}{k_2 c^2} A_3 A_1^* \exp(i\Delta kz) \quad (5.17)$$

gdzie:  $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2$ . Wybierzemy też warunki początkowe tak by na wejściu do ośrodka nie było fali o częstotliwości  $\omega_2$ . Schematycznie ilustruje to rysunek ().

Jeśli zapewnimy dopasowanie fazowe procesu  $\Delta k = 0$  to różniczkując oba równania stronami po  $z$  oraz podstawiając równanie (1) do (2) otrzymujemy:

$$\frac{d^2 A_2}{dz^2} = \frac{4\pi^2 \omega_1^2 \omega_2^2 \chi_{eff}^2}{k_1 k_2 c^4} |A_3|^2 A_2 = \kappa^2 A_2 \quad (5.18)$$

i rozwiązanie tego równania zgodne z naszych warunkami początkowymi będzie miało postać:

$$A_2(z) = i \sqrt{\frac{n_1 \omega_2}{n_2 \omega_1} \frac{A_3}{|A_3|}} A_1^*(0) \sinh(\kappa z) \quad (5.19)$$

Natomiast dla fali o częstotliwości  $\omega_1$  otrzymujemy po prostu

$$A_1(z) = A_1(0) \cosh(\kappa z) \quad (5.20)$$

Zauważmy, że w tym przypadku natężenia pól o częstotliwościach  $\omega_1$  oraz  $\omega_2$  rosną monotonnie wraz z  $z$ . Dzieje się to oczywiście kosztem energii zawartej w polu fali  $A_3$ . Asymptotycznie obie fale  $A_1$  i  $A_2$  rosną wykładniczo. Pamiętajmy jednak, że nasze przybliżenie jest słuszne jedynie dopóty, dopóki możemy pominąć zmiany natężenia  $A_3$ ,

a więc dopóki natężenie  $A_2$  oraz wzrost natężenia  $A_1$  są względnie małe. Następną ciekawą obserwacją jest, że faza fali  $A_1$  pozostaje w ramach naszego przybliżenia stała, a faza fali  $A_2$  jest różnicą faz fal  $A_3$  i  $A_1(0)$ . Widzimy tu zasadniczą różnicę w dynamice procesu w porównaniu z generacją sumy harmoniczných. Można to zrozumieć na podstawie następującego rozważania, które zilustrujemy rysunkiem. Z rys.1 widzimy, że obecność pola  $A_3$  stymuluje wzmocnienie pola  $A_2$  w procesie dwufotonowej emisji wymuszonej, przy czym kosztem anihilacji fotonu o częstotliwości  $\omega_3$  powstają dwa fotony o częstotliwościach  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . W ten sposób generacja pola o częstotliwości  $\omega_2$  wzmacnia jednocześnie falę o częstotliwości  $\omega_1$ . Jest to przykład procesu parametrycznego. Te procesy omówimy szczegółowo w następnym wykładzie. Opisany tu proces nazywany jest wzmocnieniem parametrycznym. W tradycyjnym języku stosowanym do opisu takich zjawisk, mówi się że sygnał (fala  $A_2$ ) jest wzmacniany w procesie nieliniowego mieszania i generuje wiązkę jałową - falę o częstotliwości  $\omega_1$ . Na tej zasadzie zbudowany jest tzw. oscylator parametryczny. Jeśli na końcach ośrodka umieścimy zwierciadła o dużym współczynniku odbicia w zakresie częstotliwości  $\omega_1$  lub  $\omega_2$  otrzymamy rezonator optyczny. Pierwszy oscylator parametryczny zbudowali Giordmaine i Muller w 1965, a teoretyczny opis tych zjawisk zawdzięczamy Byerowi oraz Herbstowi (1977).

## 5.4 Generacja drugiej harmonicznej

Rozważmy teraz szczególny przypadek generacji sumy harmoniczných w którym  $\omega_1 = \omega_2$  oraz  $\omega_3 = 2\omega_1$ . W tym wypadku nieliniowa polaryzacja ma tylko dwa wyrazy o częstotliwościach  $\omega_1$  oraz  $\omega_3$ . Jak już wcześniej wspomnieliśmy nie można potraktować tego przypadku, jako przypadku granicznego generacji sumy częstotliwości, ponieważ nie jest spełniony warunek 'dobrej rozdzielczości'. Natomiast możemy zastosować naszą metodę wolno zmiennych obwiedni do przypadku dwóch impulsów, z tym tylko, że degeneracja tensora przenikalności dielektrycznej trzeciego rzędu, w wyrażeniu na polaryzację o częstotliwości  $2\omega_1$  jest dwukrotnie mniejsza, niż w wyrażeniu na  $\omega_1$ , możemy więc zapisać:

$$\vec{P}_{NL}(z, t) = \vec{P}_1(z, t) + \vec{P}_3(z, t) \quad (5.21)$$

przy czym:

$$\vec{P}_1(z, t) = \chi_{eff} E_1^* E_3 \quad (5.22)$$

oraz

$$\vec{P}_3(z, t) = \chi_{eff}/2 A_1^* A_3 \exp(2ik_1) \exp(-2i\omega_1 t) \quad (5.23)$$

(w polaryzacji  $P_1$  pojawił się dodatkowy czynnik 2 wynikający z degeneracji). Sprzężone równania na obwiednie biorący udział w procesie są zatem równe:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= \frac{2\pi i \omega_1^2 \chi_{eff}}{k_1 c^2} A_3^* A_1 \exp(-i\Delta k z) \\ \frac{dA_3}{dz} &= \frac{\pi i \omega_3^2 \chi_{eff}}{k_3 c^2} A_1^2 \exp(i\Delta k z) \end{aligned} \quad (5.24)$$

gdzie:  $\Delta k = 2k_1 - k_3$ . W tym rozdziale znajdziemy ogólne rozwiązanie układu równań (5.24), nie ograniczając się do specjalnego przypadku, jak to miało miejsce dotychczas. Aby podać rozwiązanie tego układu równań wprowadźmy najpierw amplitudę i fazę dla każdej z obwiedni.

$$A_i = \sqrt{\frac{2\pi I}{n_i c}} u_i \exp(i\phi_i) \quad i = 1, 3 \quad (5.25)$$

gdzie:  $I = I_1 + I_2$ , a  $I_i = \frac{n_i c}{2\pi} |A_i|^2$ .

Ze względu na wprowadzone powyżej związki Monley'a-Rowa otrzymamy natychmiast pierwszą całkę ruchu dla tych równań. Całkowite natężenie  $I$  jest wielkością stałą w procesie generacji drugiej harmonicznej, a zatem:

$$u_1^2(z) + u_3^2(z) = 1 \quad (5.26)$$

Wprowadźmy teraz nową jednostkę długości  $z = \xi/l$ , gdzie  $l = \frac{1}{8\pi\omega_1 d} \sqrt{\frac{n_1^2 n_2 c^3}{2\pi I}}$ , określa stałą długości charakterystyczną dla przepływu energii pomiędzy falami o częstościach  $\omega_1$  i  $\omega_3$ . Zauważmy także, że możemy wprowadzić względną fazę  $\theta = 2\phi_1 - \phi_3 + \Delta k$  oraz bezwymiarowy parametr dopasowania fazowego  $\Delta s = \Delta k l$ .

Powyższe jednostki zostały dobrane tak, by równanie *wyjaśnić - przeliczyć* (5.24) uprościć się do:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\xi} &= -u_1 u_3 \sin(\theta) \\ \frac{du_3}{d\xi} &= u_1^2 \sin(\theta) \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \Delta s + \operatorname{ctg}(\theta) \frac{d}{d\xi} (\ln(u_1^2 u_3)) \quad (5.28)$$

Te równania można rozwiązać w ogólnym przypadku, ale rozwiązanie jest dosyć pracochłonne. Tutaj dla zachowania przejrzystości wykładu ograniczymy się do przypadku  $\Delta s = 0$ . Ostatnie z równań (5.27) możemy przepisać wtedy jako:

$$\frac{d}{d\xi} \{ \ln[\cos(\theta) u_1^2 u_3] \} = 0 \quad (5.29)$$

i natychmiast otrzymujemy drugą całkę ruchu dla równań (5.27). Zachowana jest mi-anowicie wielkość :

$$\Gamma = u_1^2 u_3 \cos(\theta) = u_1^2(0) u_3(0) \cos(\theta) \quad (5.30)$$

Wielkość tę możemy obliczyć korzystając z warunków początkowych. Wykorzystamy teraz obie całki ruchu aby rozseparować równania (5.27). Drugie z równań (5.27) możemy zapisać w zmodyfikowanej postaci, używając w jawnej postaci całki ruchu  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \frac{du_3}{d\xi} &= \pm \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = \pm (1 - u_3^2) \sqrt{1 - \frac{\Gamma^2}{u_1^4 u_3^2}} = \\ &= \pm (1 - u_3^2) \sqrt{1 - \frac{\Gamma^2}{(1 - u_3^2)^2 u_3^2}} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Wygodnie jest pomnożyć to równanie stronami przez  $u_3$  i napisać równanie na  $u_3^2$ :

$$\frac{du_3^2}{d\xi} = \pm \sqrt{(1 - u_3^2)^2 u_3^2 - \Gamma^2} \quad (5.32)$$

Rozwiązanie tego równania wyraża się przez funkcje eliptyczne Jacobiego<sup>2</sup>. Na rysunku (2.6.2) pokazano przykładowe rozwiązanie przy pewnych warunkach początkowych, przy których  $\Gamma \neq 0$ . Na ogół rozwiązanie (tak ja w przypadku przedstawionym na rysunku) opisuje periodycznie przelewanie się populacji pomiędzy składową fundamentalną  $\omega_1$  oraz drugą harmoniczną  $\omega_3 = 2\omega_1$ . Inny charakter mają rozwiązania w przypadku, gdy ograniczymy się do  $\Gamma = 0$ , czyli kiedy na wejściu do ośrodka nie podajemy jednej z fal, bądź tak je dopasowujemy fazowo, że:  $\theta = \pi/2 = 2\phi_1 - \phi_3$  rozwiązanie na drugą harmoniczną redukuje się do :

$$u_2(\xi) = \tanh(\xi + \xi_0) \quad (5.34)$$

Kiedy założymy dodatkowo  $u_1(0) = 1$  oraz  $u_3(0) = 0$  to otrzymamy bardzo proste rozwiązanie

$$u_1(\xi) = \operatorname{sech}(\xi) \quad (5.35)$$

$$u_3(\xi) = \tanh(\xi) \quad (5.36)$$

To rozwiązanie zostało zilustrowane na rysunku (2.6.3) W artykule Armstronga, o którym wspomnieliśmy już powyżej, można znaleźć ogólne rozwiązanie dla przypadku  $\Delta k \neq 0$ . Rezultaty dla różnych wartości  $\Delta k$  zostały przedstawione na rysunku (2.6.4)

## 5.5 Dopasowanie fazowe

Jak zauważyliśmy w poprzednich paragrafach, na proces generacji sumy i różnicy częstotliwości oraz na generację drugiej harmonicznej zasadniczy wpływ na dopasowanie fazowe. Najlepiej ilustruje to zjawisko eksperyment wykonany przez P.D. Markera oraz jego współpracowników. W eksperymencie zoigniskowano wiązkę lasera rubinowego na kryształ kwarcu i mierzono natężenie drugiej harmonicznej na wyjściu kryształu. Rezultaty eksperymentu (kropki) raz wyniki obliczeń teoretycznych (linia ciągła) przedstawiono na rysunku (2.7.1). Efekt dopasowania fazowego opiszemy na przykładzie generacji drugiej harmonicznej. W kryształ nieliniowym naświetlanym wiązką o częstotliwości  $\omega_1$  pojawia się fala polaryzacji o częstotliwości  $2\omega_1$ , która jest źródłem promieniowania o częstotliwości  $2\omega_1$ . Początkowo polaryzacja i wywołana przez nią fala elektromagnetyczna są w fazach zgodnych. Później jednak powstaje między nimi różnica faz będąca wynikiem różnych prędkości grupowych rozchodzenia się tych fal. Oznacza to, że psują się warunki przepompowania energii z fali polaryzacji do fali drugiej harmonicznej. Droga optyczna w kryształ, potrzeba do tego aby fazy fal harmonicznej o częstotliwości  $2\omega_1$  i polaryzacji

<sup>2</sup>Eliptyczne funkcje Jacobiego definiuje się w postaci całkowej. Niech:

$$u = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2(\theta)}}, \quad (5.33)$$

wówczas sinus eliptyczny Jacobiego  $sn(u) = \sin(\phi)$ , cosinus eliptyczny Jacobiego  $cn(u) = \cos(\phi)$  delta amplitudy Jacobiego  $dn(u) = \sqrt{1 - m \sin^2(\theta)}$

o częstości  $2\omega_1$  różniły się o  $\pi$  nazywa się długością spójności. Długość spójności jest więc wielkością charakteryzującą długość drogi optycznej, na której następuje efektywne przepompowanie energii z fali polaryzacji do fali drugiej harmonicznej. Okazuje się, że ta droga spójności, jeśli nie wybierzemy kierunku propagacji tak aby zagwarantować dopasowanie fazowe, jest bardzo krótka, i przepompowanie energii jest w takim przypadku bardzo małe. Optymalna sytuacja powstałaby wtedy, gdyby podczas całej drogi optycznej w kryształach następowało przepompowywanie energii. Taką sytuację można urzeczywistnić, jak się przekonaliśmy w poprzednich paragrafach tego wykładu, w kryształach nieliniowych w pewnych kierunkach, kiedy  $\Delta k = 0$ . Takie kierunki nazywa się kierunkami dopasowania fazowego. Warunki dopasowania fazowego są trudne do zrealizowania, ponieważ współczynnik załamania w obszarze gdzie znika absorpcja (jest to obszar dyspersji normalnej) jest monotoniczną funkcją częstości. W rezultacie nie można w przypadku propagacji kolinearnej spełnić równocześnie dwóch warunków:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 \quad (5.37)$$

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = n_3\omega_3 \quad (5.38)$$

Oczywiście zakładaliśmy tutaj, że wszystkie promienie biorące udział w tym procesie są promieniami zwyczajnymi. Jeśli zrezygnować z tego ograniczenia, i dopuścić do udziału w procesie zarówno promienie zwyczajne jak i nadzwyczajne, warunki dopasowania fazowego można spełnić, przynajmniej w pewnym zakresie kątów oraz częstości. Rozważmy jeden z przypadków, w którym takie dopasowanie jest możliwe. W kryształach nieliniowych (będziemy tu dyskutowali wyłącznie przypadek kryształu jednoosiowego, jako prostszy koncepcyjnie) kierunek wyznaczony przez przecięcie się powierzchni współczynnika załamania promienia zwyczajnego dla częstości podstawowej i promienia nadzwyczajnego dla częstości drugiej harmonicznej, czyli kierunek, w którym odpowiednie współczynniki załamania są jednakowe, wyznacza położenie kierunku dopasowania fazowego. A zatem w naszym procesie generacji drugiej harmonicznej będą uczestniczyły dwie fale o częstościach  $\omega_1$ , obie będące promieniami zwyczajnymi, a generowana fala o częstości  $2\omega_1$  będzie promieniem nadzwyczajnym. Sytuację fizyczną ilustruje rysunek. Takie dopasowanie jest możliwe do zrealizowania w ujemnym kryształach jednoosiowych. W dodatnim kryształach jednoosiowych promienie o częstości podstawowej powinny być promieniami nadzwyczajnymi, a fala o częstości drugiej harmonicznej powinna mieć polaryzację promienia zwyczajnego. I wreszcie możliwa jest sytuacja, w której jeden z promieni o częstości podstawowej jest promieniem nadzwyczajnym a drugi promieniem zwyczajnym. A zatem wyróżniamy dwa rodzaje dopasowania fazowego: Typ I oba promienie o częstości podstawowej są tego samego typu Typ II jeden z promieni o częstości podstawowej jest promieniem zwyczajnym a drugi nadzwyczajnym. Sytuację tę ilustruje tabela. Wspomniana powyżej metoda dopasowania fazowego wymaga precyzyjnego ustawienia osi optycznej kryształu wobec kierunku rozchodzenia się wiązki światła, oraz precyzyjnego wyboru polaryzacji. Jak już wspomnieliśmy w wykładzie 3, jeśli polaryzacja wiązki światła, rozchodzącej się w kryształach jednoosiowych, znajduje się w płaszczyźnie wyznaczonej przez oś optyczną oraz kierunek propagacji, to propaguje się ona jak promień nadzwyczajny, a współczynnik załamania ośrodka wyraża się wzorem:

$$\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{\sin^2(\theta)}{n_e^2} + \frac{\cos^2(\theta)}{n_o^2} \quad (5.39)$$

gdzie  $n_e^2$ ,  $n_o^2$  oznaczają wartości własne tensora dielektrycznego, a kąt  $\theta$  oznacza kąt pomiędzy kierunkami wektora propagacji i osią optyczną kryształu. Jeśli wybierzemy kąt  $\theta$ , tak by był spełniony warunek:

$$n_e(2\omega_1, \theta) = n_o(\omega_1) \quad (5.40)$$

spełnimy warunek dopasowania fazowego. W tym wypadku warunek na kąt  $\theta$  można zapisać:

$$\sin^2(\theta) = \left( \frac{1}{n_e^2(\omega_1)} + \frac{1}{n_o^2(2\omega_1)} \right) \times \left( \frac{1}{n_e^2(\omega_1)} + \frac{1}{n_o^2(2\omega_1)} \right)^{-1} \quad (5.41)$$

Takie dopasowanie fazowe posiada zasadniczą wadę. Otóż kąt dopasowania fazowego  $\theta$  obliczony ze wzoru (5.41), jest na ogół różny od  $\pi/2$ . W takim przypadku, promień nadzwyczajny biorący udział w procesie, będzie dryfował z kierunku propagacji promienia zwyczajnego (patrz wykład 2). W wyniku tego procesu przestrzenne przykrywanie się oddziałujących wiązek staje się ograniczone, a cały proces traci na efektywności. Zamiast tej metody stosuje się często tak zwane dopasowanie temperaturowe. W niektórych kryształach, różnica współczynników załamania  $n_e(\omega) - n_o(\omega)$  silnie zależy od temperatury. Można wówczas osiągnąć dopasowanie fazowe dla kąta  $\theta = \pi/2$ , dobierając jedynie odpowiednią temperaturę kryształu. Quasi-phase matching.

## 5.6 Nieliniowa optyka impulsów Gaussowskich



## Rozdział 6

# Oddziaływania rezonansowe.

### 6.1 Częstości rezonansowe

W poprzednich wykładach dyskutowaliśmy oddziaływanie ośrodka optycznego z falami elektromagnetycznymi o częstościach nierezonansowych, to znaczy takich, które różnią się znacznie od częstości własnych tego ośrodka. W takich warunkach, jak wspominaliśmy poprzednio, cała dynamika ośrodka, powstająca w wyniku oddziaływania z zewnętrzną, zaburzającą falą elektromagnetyczną, sprowadzała się do wprowadzenia tensora podatności dielektrycznej. Ułatwia to opis dyskutowanych zjawisk, bowiem możemy skupić się na dynamice pola elektromagnetycznego, zakładając, że ośrodek znajduje się w stanie równowagi. Polaryzacja ośrodka jest funkcją natężenia pola elektrycznego, i nasze dotychczasowe postępowanie sprowadzało się do przybliżenia tej polaryzacji poprzez szereg potęgowy  $\vec{P}(t) = \hat{\chi}^{(1)} \vec{E}(t) + \hat{\chi}^{(2)} \vec{E}^2(t) + \hat{\chi}^{(3)} \vec{E}^3(t)$  łatwo jest się przekonać, że nie zawsze takie rozwinięcie ma sens. Dzieje się tak wtedy, gdy nasz szereg potęgowy nie jest zbieżny. Za przykład może nam posłużyć nasycalny absorber, czyli ośrodek którego stała absorpcji  $\alpha$  jest funkcją natężenia padającej fali  $\alpha = \frac{\alpha_0}{1+I/I_s}$ . W tym ostatnim wzorze  $\alpha_0$  jest równe efektywnemu współczynnikowi absorpcji w granicy małych natężeń, zaś  $I_s$  jest parametrem określającym obszar natężeń, dla których następuje nasycenie absorpcji. Współczynnik absorpcji  $\alpha$  można rozwinąć w szereg potęgowy w natężeniu padającej fali  $I$ ,  $\alpha = \alpha_0 (1 - I/I_s + (I/I_s)^2 - \dots)$ , lecz szereg ten jest zbieżny jedynie dla natężeń  $I < I_s$ . Zatem dla natężeń z poza tego zakresu mamy do czynienia z układem, który nie daje się opisać metodami wprowadzonymi w toku dotychczasowego wykładu i musimy szukać nowych rozwiązań.

### 6.2 Równania Blocha

Wyprowadzimy na wstępie równania ruchu dla kwantowego atomu dwupoziomowego, oddziałującego z zewnętrznym polem elektromagnetycznym. Założymy dodatkowo, że to zewnętrzne pole ma natężenie na tyle duże, abysmy mogli je traktować w sposób klasyczny. Będziemy rozważali układ składający się z atomu dwupoziomeowego oraz zewnętrznej fali elektromagnetycznej. Należałoby w sposób spójny opisać dynamikę obu części naszego układu. Jest to zadanie bardzo trudne i w większości przypadków będziemy jedynie uwzględniać wpływ pola elektromagnetycznego na dynamikę atomów.

Hamiltonian naszego układu ma postać  $H = H_0 + V(t)$ , gdzie odnosi  $H_0$  się do dwupoziomowego atomu, a  $V(t)$  do energii oddziaływania z zewnętrzną falą elektromagnetyczną. Poszukajmy rozwiązania - stanu własnego naszego hamiltonianu w postaci  $\psi(t) = a(t)u_a + b(t)u_b$ . Stany  $u_a$  oraz  $u_b$  są stanami własnymi hamiltonianu  $H_0$  a więc spełnione są równania:

$$H_0 u_a = \frac{\hbar\omega}{2} u_a \quad (6.1)$$

$$H_0 u_b = -\frac{\hbar\omega}{2} u_b \quad (6.2)$$

Musimy teraz wyznaczyć współczynniki  $a$  i  $b$ , a więc powinniśmy wyznaczyć cztery wielkości rzeczywiste. Ze względu na to, że każdy stan układu jest znormalizowany, musimy wyznaczyć tylko trzy niezależne stałe rzeczywiste. Wybierzemy je tak, aby zdefiniować wielkości:

$$r_1 = ab^* + ba^* \quad (6.3)$$

$$r_2 = i(ab^* - ba^*) \quad (6.4)$$

$$r_3 = aa^* - bb^* \quad (6.5)$$

tak aby zdefiniować trzy składowe wektora. Jest to wektor o długości jednostkowej

$$|\vec{r}|^2 = (|a|^2 + |b|^2)^2 = \left( \int \psi \psi^* dv \right)^2 = 1 \quad (6.6)$$

a jego składowe znajdujemy z równań ruchu

$$(H_0 + V)(au_a + bu_b) = i\hbar(\dot{a}u_a + \dot{b}u_b) \quad (6.7)$$

otrzymując:

$$\dot{a} = -\frac{i}{\hbar} \left[ a \left( \frac{\hbar\omega}{2} + V_{aa} \right) + bV_{ab} \right] \quad (6.8)$$

$$\dot{b} = -\frac{i}{\hbar} \left[ b \left( -\frac{\hbar\omega}{2} + V_{bb} \right) + aV_{ba} \right]$$

W dalszej części wykładu ograniczymy się do przypadku, gdy  $V_{aa}$  oraz  $V_{bb}$  są zaniedbywalnie małe. Wówczas równania (6.8) przyjmują postać ruchu obrotowego wektora

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega}(t) \times \vec{r} \quad (6.9)$$

a wektor ten nazywamy wektorem Blocha. Wektor prędkości kątowej obrotu ma trzy składowe równe:

$$\begin{aligned} \omega_1 &\equiv (V_{ab} + V_{ba})/\hbar \\ \omega_2 &\equiv i(V_{ab} - V_{ba})/\hbar \\ \omega_3 &\equiv \omega \end{aligned} \quad (6.10)$$

Sprawdźmy, czy tak rzeczywiście jest. Równanie ruchu pierwszej składowej wektora  $\vec{r}$  ma postać:

$$\dot{r}_1 = \omega_2 r_3 - \omega_3 r_2 \quad (6.11)$$

Lewa strona równa się :  $\dot{a}b^* + a(\dot{b})^* + c.c.$ , i jeśli ponadto założymy, że:  $V_{aa} = V_{bb} = 0$ , to otrzymamy ostatecznie:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \frac{i}{\hbar}(-\hbar\omega ab^* + V_{ba}^*aa^* - V_{ab}bb^*) + c.c. \quad (6.12)$$

a więc istotnie

$$\omega_2 r_3 - \omega_3 r_2 = \frac{i}{\hbar}(V_{ab} - V_{ba})(aa^* - bb^*) - i\omega(ab^* - ba^*). \quad (6.13)$$

W podobny sposób można sprawdzić pozostałe składowe w równaniu (6.10).

Opiszemy teraz potencjał oddziaływania naszego dwupoziomowego atomu z polem fali elektromagnetycznej. Oddziaływanie ma postać iloczynu skalarnego momentu dipolowego atomu oraz pola elektrycznego fali:

$$V = -\mu_x E_x - \mu_y E_y \quad (6.14)$$

a jeśli wprowadzimy oznaczenia:

$$\mu^+ \equiv \mu_x + i\mu_y \quad (6.15)$$

$$E^+ \equiv E_x + iE_y \quad (6.16)$$

$$\mu^- \equiv \mu_x - i\mu_y \quad (6.17)$$

$$E^- \equiv E_x - iE_y \quad (6.18)$$

to (6.14) możemy zapisać jako:

$$V = -\frac{1}{2}(\mu^+ E^- - \mu^- E^+) \quad (6.19)$$

Ponieważ dla przejść energetyczny w atomie obowiązują reguły wyboru, nasze stany atomu dwupoziomowego powinny być tak dobrane, aby następowało przejście (**UP-  
EWNIĆ SIĘ CO DO ZNAKU** =)

$$\langle m+1 | \mu^- | m \rangle \neq 0 \quad (6.20)$$

$$\langle m | \mu^+ | m+1 \rangle \neq 0 \quad (6.21)$$

i elementy macierzowe, występujące we wzorze (6.8) oznaczają:

$$V_{ab} = -\frac{1}{2}\mu_{ab}^+(E_x - iE_y) \quad (6.22)$$

$$V_{ba} = -\frac{1}{2}\mu_{ba}^-(E_x + iE_y). \quad (6.23)$$

Fazy funkcji falowych możemy dobrać tak aby  $\mu_{ab}^+ = \mu_{ba}^- \equiv 2\mu$ , gdzie  $\mu = \langle b | \mu_x | a \rangle$ . Zgodnie z tymi oznaczeniami prędkości kątowne wektora obrotu będą teraz równe

$$\omega_1 \equiv (V_{ab} + V_{ba})/\hbar = -\frac{2\mu E_x(t)}{\hbar} \quad (6.24)$$

$$\omega_2 \equiv i(V_{ab} + V_{ba})/\hbar = -\frac{2\mu E_y(t)}{\hbar} \quad (6.25)$$

a więc składowe wektora obrotu w płaszczyźnie  $x - y$  zachowują się analogicznie, jak składowe wektora pola elektrycznego. Podobnie można zinterpretować składowe wektora  $\vec{r}$ . Rozważmy wartość oczekiwaną operatora momentu dipolowego:

$$\langle \mu_x \rangle = \frac{1}{2} \langle \mu^+ + \mu^- \rangle = \frac{1}{2} \int dv (a^* u_a^* + b^* u_b^*) (\mu^+ + \mu^-) (a u_a + b u_b) \quad (6.26)$$

i używając definicji (7.14???) otrzymujemy

$$\langle \mu_x \rangle = \mu r_1 \quad (6.27)$$

$$\langle \mu_y \rangle = \mu r_2 \quad (6.28)$$

a więc wartość oczekiwana wektora momentu dipolowego zachowuje się analogicznie jak składowe wektora  $\vec{r}$  w płaszczyźnie  $x - y$ . Zdefiniowaliśmy już wszystkie potrzebne wielkości i możemy rozwiązywać równania (6.9). W dalszej części wykładu znajdziemy rozwiązania tego równania dla kilku różnych przypadków, czyli różnych fal elektromagnetycznych. Zanim jednak do tego dojdziemy zastanowimy się przez chwilę nad analogią ze zjawiskiem rezonansu magnetycznego.

$$\vec{\mu} = \frac{2\beta}{\hbar} \vec{S} \quad (6.29)$$

$$2\mu \equiv \mu_{ab}^+ = \frac{2\beta}{\hbar} \langle \frac{1}{2} | S^+ | - \frac{1}{2} \rangle = 2\beta \quad (6.30)$$

$$\langle \mu_x \rangle = \beta r_1 \quad (6.31)$$

$$\langle \mu_y \rangle = \beta r_2 \quad (6.32)$$

$$\langle \mu_z \rangle = \langle a u_{1/2} + b u_{-1/2} | \frac{2\beta}{\hbar} S_z | a u_{1/2} + b u_{-1/2} \rangle = \beta (a a^* - b b^*) = \beta r_3 \quad (6.33)$$

$$\omega_1 = -\frac{2\beta H_x}{\hbar} \quad (6.34)$$

$$\omega_1 = -\frac{2\beta H_y}{\hbar} \quad (6.35)$$

$$\hbar \omega_3 = \hbar \omega = -2\beta H_z \quad (6.36)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{\mu} \rangle = \gamma \langle \vec{\mu} \rangle \times \vec{H} \quad (6.37)$$

$$\langle \mu_z \rangle \propto \langle a u_a + b u_b | z | a u_a + b u_b \rangle \quad (6.38)$$

$$\langle H_0 \rangle = \int dv \psi^* H_0 \psi = (a a^* - b b^*) \frac{\hbar \omega}{2} \quad (6.39)$$

### 6.3 Transformacja do obracającego się układu. Przybliżenie wirującej fali.

W poprzednim paragrafie wyprowadziliśmy równanie ruchu wektora  $\vec{r}$ . Wektor ten, skonstruowany z wielkości fizycznych - koherencji oraz różnicy osadzeń - wykonuje obrót wokół, zmiennego w czasie wektora  $\vec{\omega}$ :

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega}(t) \times \vec{r} \quad (6.40)$$

Równanie ruchu (6.40) ma bardzo zwartą postać, nie jest jednak proste do analizowania. Wygodnie jest napisać to równanie w innym, niestacjonarnym układzie współrzędnych.

Wybermy pewną oś jako oś obrotu  $\vec{\Omega}$ , i oglądajmy wektor  $\vec{r}$  w układzie, który się obraca wokół osi  $\vec{\Omega}$  z prędkością kątową  $\Omega$ . Wówczas współrzędne wektora  $\vec{r}$  w tym nowym układzie współrzędnych będą równe:

$$\dot{\vec{r}}_R = \left(\dot{\vec{r}}\right)_R - \vec{\Omega} \times \vec{r}_R \quad (6.41)$$

gdzie litera  $R$  oznacza, że współrzędne wektora należy liczyć w nowym, obracającym się układzie współrzędnych. Wzór ten wynika z podstawowych własności obrotów, i jego wyprowadzenie można znaleźć w dowolnym podręczniku mechaniki klasycznej. Jeśli teraz we wzorze (6.41) podstawimy  $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  to otrzymamy ostatecznie:

$$\dot{\vec{r}}_R = (\vec{\omega}_R - \vec{\Omega}) \times \vec{r}_R = \vec{\Omega}' \times \vec{r}_R \quad (6.42)$$

Najwygodniej jest wybrać oś obrotu  $\vec{\Omega}$  wokół osi oryginalnego układu współrzędnych i dobrać prędkość obrotu tak by była ona zbliżona do częstości oscylacji pola elektrycznego  $\omega_0$ . Wówczas trzecia składowa wektora  $\vec{\Omega}'$  jest równa  $\omega - \omega_0$ , a pozostałe składowe można oszacować stosując tak zwane przybliżenie wirującej fali. To przybliżenie zademonstrujemy na przykładach w następnych paragrafach.

## 6.4 Zachowanie wektora Blocha bez pola

W przypadku, gdy atom nie jest poddany działaniu zewnętrznego pola lasera jego ewolucja jest szczególnie prosta. Współrzędne wektora  $\vec{\omega}$  są równe

$$\omega_1 = 0 \quad (6.43)$$

$$\omega_2 = 0 \quad (6.44)$$

$$\omega_3 = \omega \Rightarrow \vec{\omega} = \omega \vec{a}_3 \quad (6.45)$$

i dobierając  $\vec{\Omega}$  tak, jak to zaproponowaliśmy na końcu poprzedniego paragrafu otrzymujemy

$$\dot{\vec{r}}_R = \vec{a}_{||} (\omega - \Omega) \times \vec{r}_R = 0 \Rightarrow \quad (6.46)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_R = \overrightarrow{\text{const}} \quad (6.47)$$

Możemy teraz powrócić do pierwotnego układu współrzędnych i otrzymamy ostatecznie:

$$r_1 = r_{\perp} \cos(\omega t) - r_{||} \sin(\omega t) \quad (6.48)$$

$$r_2 = r_{\perp} \sin(\omega t) + r_{||} \cos(\omega t) \quad (6.49)$$

$$r_3 = \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2} = \text{const} \quad (6.50)$$

Jak widać trzecia składowa wektora, która opisuje różnicę obsadzeń pomiędzy poziomem podstawowym i wzbudzonym pozostaje wielkością stałą. Nie ma żadnego mechanizmu wzbudzającego ośrodek. Natomiast pierwsza i druga składowa oscylują z częstością  $\omega$ . Część atomów znajduje się w stanie wzbudzonym i ośrodek posiada niezerową polaryzację, którą możemy zapisać jako

$$P_x = U \cos(\omega t) - V \sin(\omega t) \quad (6.51)$$

$$P_x = N \langle \mu_x \rangle = N \mu r_1 = N \mu (r_{\perp} \cos(\omega t) - r_{||} \sin(\omega t)) \quad (6.52)$$

gdzie wprowadziliśmy dwie składowe wektora polaryzacji

$$U = N\mu r_{\perp} = (N_a - N_b)\mu r_{\perp} \quad (6.53)$$

$$V = N\mu r_{\parallel} = (N_a - N_b)\mu r_{\parallel} \quad (6.54)$$

Zauważmy jeszcze, że gdy w układzie nie ma żadnych atomów wzbudzonych to  $r_1 = r_2 = 0$  i nie występują żadne oscylacje. Z drugiej strony kiedy część atomów znajduje się w stanie wzbudzonym, układ wykonuje drgania harmoniczne, a ponieważ te drgania wiążą się z ruchem ładunków, atomy wzbudzone promieniują fale elektromagnetyczne. Powinniśmy zatem wprowadzić tłumienie.

## 6.5 Zachowanie wektora Blocha w polu fali płaskiej

Załóżmy teraz, że nasz atom znajduje się w zewnętrznym polu elektrycznym o polaryzacji kołowej w płaszczyźnie  $x - y$ . Składowe wektora natężenia pola elektrycznego mają postać:

$$E_x = E \cos \omega_0 t \quad (6.55)$$

$$E_y = E \sin \omega_0 t \quad (6.56)$$

W tym przypadku składowe wektora obrotu  $\vec{\omega}$  wynoszą

$$\omega_1 = -\frac{2\mu}{\hbar} E \cos \omega_0 t \quad (6.57)$$

$$\omega_2 = -\frac{2\mu}{\hbar} E \sin \omega_0 t \quad (6.58)$$

$$\omega_3 = \omega \quad (6.59)$$

Wprowadzimy obracający układ współrzędnych, obracający się z prędkością kątową  $\omega_0$  wokół osi  $z$ . Dokonajmy teraz transformacji opisanej równaniami (6.41) oraz (6.42). Wektor  $\vec{\Omega}$  ma składową jedynie wzdłuż kierunku  $z$  ( $\vec{\Omega} = (0, 0, \omega_0)$ ). Natomiast wektor  $\vec{\omega}$  w obracającym układzie współrzędnych będzie nieruchomy, i poprzez odpowiedni wybór osi obracającego się układu możemy czynić go równoległym do osi  $\vec{x}_R$ . A zatem w nowym układzie współrzędnych składowe wektora  $\vec{\omega}$  stają się równe  $\omega_R = (-2\mu E/\hbar, 0, \omega)$ , a równanie ruchu (6.42) przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_R(\omega) = \left[ \vec{a}_{\perp} \left( -\frac{2\mu}{\hbar} E \right) + \vec{a}_{\parallel} (\omega - \omega_0) \right] \times \vec{r}_R(\omega) \equiv \vec{\omega}_{eff} \times \vec{r}_R(\omega) \quad (6.60)$$

przy czym efektywna częstość obrotu jest równa

$$|\vec{\omega}_{eff}| = \sqrt{\left( -\frac{2\mu}{\hbar} E \right)^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad (6.61)$$

W wyjściowym, nie obracającym się układzie współrzędnych składowe wektora  $\vec{r}$  są równe

$$r_{\perp} = \frac{\omega_I(\omega - \omega_0)}{\omega_{eff}^2} (1 - \cos \omega_{eff} t) \quad (6.62)$$

$$r_{||} = -\frac{\omega_I}{\omega_{eff}} \sin \omega_{eff} t \quad (6.63)$$

$$r_{|||} = 1 - 2 \frac{\omega_I}{\omega_{eff}} \sin^2 \frac{\omega_{eff} t}{2} \quad (6.64)$$

gdzie  $\omega_I = 1 - 2\mu E/\hbar$ . Możemy teraz znaleźć wartości obsadzenia obu poziomów atomu, korzystając z tego  $r_{|||} = |a|^2 + |b|^2$ , a z drugiej strony  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ :

$$|a|^2 = 1 - \frac{\omega_I}{\omega_e} \sin^2 \frac{\omega_e t}{2} \quad (6.65)$$

$$|b|^2 = \frac{\omega_I}{\omega_e} \sin^2 \frac{\omega_e t}{2} \quad (6.66)$$

W przypadku rezonansu ( $\omega = \omega_0$ ) otrzymujemy:

$$|a|^2 = \cos^2 \frac{\omega_I t}{2} \quad (6.67)$$

$$|b|^2 = \sin^2 \frac{\omega_I t}{2} \quad (6.68)$$

a zatem populacja oscyluje pomiędzy stanem podstawowym i wzbudzonym. Zauważmy, że wybraliśmy falę elektromagnetyczną spolaryzowaną kołowo, tak że przejście do obracającego się układu współrzędnych pozwoliło nam otrzymać stacjonarny wektor prędkości kątowej. Gdybyśmy wybrali polaryzację liniową, i rozłożyli na dwie przeciwnie obracające się polaryzacje kołowe, to poza stałymi składowymi występującymi w równaniu (6.60), pojawiłaby się jeszcze jedna oscylująca z częstością  $2\omega_0$  składowa. Uśrednienie polegające na pominięciu tej składowej nazywa się właśnie przybliżeniem wirującej fali. Rzeczywiście, w przypadku, gdy polaryzacja padającej na atom fali elektromagnetycznej jest liniowa, czyli  $E_x = E \cos \omega_0 t$ , możemy ją zawsze rozłożyć na dwie polaryzacje kołowe

$$E_{x1} = \frac{E}{2} \cos \omega_0 t \quad (6.69)$$

$$E_{y1} = \frac{E}{2} \sin \omega_0 t \quad (6.70)$$

oraz

$$E_{x1} = \frac{E}{2} \cos \omega_0 t \quad (6.71)$$

$$E_{y1} = -\frac{E}{2} \sin \omega_0 t \quad (6.72)$$

Jeśli teraz przejdziemy do układu obracającego się, tak jak to uczyniliśmy na początku tego paragrafu, to zauważymy natychmiast że jedna ze składowych polaryzacji kołowych nie daje wkładu do ruchu i całość można opisać tak jakby atom poddany był pojedynczej fali o polaryzacji kołowej i amplitudzie  $E/2$ .

## 6.6 Nadpromienistość

$$r_{\perp} = r_{||} = 0$$

$$\begin{aligned}
r_{||} &= -1 \\
\mu_x &= \mu r_1 = \mu \sin \omega(t - t_0) \\
\mu_y &= \mu r_2 = -\mu \cos \omega(t - t_0) \\
P_x &= (N_b - N_a)\mu \sin \omega(t - t_0) \\
P_y &= -(N_b - N_a)\mu \cos \omega(t - t_0) \\
POWER &= \frac{\omega Q(N_b - N_a)^2 \mu^2 V_s^2}{\varepsilon V_c} \\
\tau &= \frac{\tilde{E}}{POWER} = \frac{\hbar \varepsilon}{2Q(N_b - N_a)\mu^2 V_s} \frac{V_c}{V_s} \\
\frac{d}{dt} \vec{r}(\omega) &= \vec{a}_{||}(\omega - \omega_0) \times \vec{r}(\omega) \\
\int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) &= 1 \\
\vec{R}(t) &= iN \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) e^{i\Delta\omega(t-t_1)} \\
\vec{R}(t_2) &= iN \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) e^{i\Delta\omega\tau} \\
\vec{R}(t) &= iN \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) e^{i(\pi - \Delta\omega\tau)} \\
\vec{R}(t > t_3) &= iN \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) e^{i\pi} e^{i\Delta\omega(t-t_3)} e^{i(\pi - \Delta\omega\tau)} = iN
\end{aligned}$$

## 6.7 Samo-indukowana przeźroczystość

Kolejnym, niezwykle istotnym przykładem oddziaływania spójnego promieniowania z atomami jest zjawisko samo-indukowanej przeźroczystości. Jest to efekt, w którym promieniowanie o natężeniu przekraczającym pewną ściśle określoną wartość progową porusza się przez ośrodek absorpcyjny bez strat. Warunki zajścia takiego zjawiska są następujące: szerokość impulsu (w czasie) musi być mała w porównaniu z charakterystycznymi czasami relaksacji w ośrodku; centralna częstość impulsu musi być rezonansowa z przejściem w atomach dwupoziomowych ośrodka.

Impuls propaguje się w ośrodku i po przebyciu pewnego dystansu przechodzi w stan, w którym jego szerokość, energia i kształt się nie zmieniają. Jednak prędkość impulsu jest znacznie mniejsza (kilka rzędów wielkości) niż tego, który porusza się w ośrodku ze stratami. Zakładamy, że pole elektryczne i polaryzacja są postaci:

$$E_x(z, t) = \frac{1}{2} \left( \varepsilon(z, t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t + \phi(z, t))} + c.c. \right) \quad (6.73)$$

$$P_x(z, t) = \frac{1}{2} \left[ (U(z, t) + iV(z, t)) \varepsilon(z, t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t + \phi(z, t))} + c.c. \right] \quad (6.74)$$

Wielkości  $\varepsilon$ ,  $U$  i  $V$  są rzeczywiste.  $U$  i  $V$  są składowymi polaryzacji opisującymi dyspersję i absorpcję.  $\phi$  jest, w ogólności, zespoloną fazą.

Równania powyższe wstawiamy dorównania falowego i dostajemy:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \left( \frac{n}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (6.75)$$



W notacji pomijamy, dla skrócenia zapisu, wskaźnik  $x$ . Następnym krokiem przyrównanie w powyższym równaniu wielkości rzeczywistych i urojonych. Dokonujemy również przybliżenia wolno zmiennej obwiedni, czyli zakładamy, że:

$$\frac{\partial F}{\partial t} \ll \omega_0 F \quad (6.76)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \ll \omega_0 \frac{\partial F}{\partial t} \quad (6.77)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \ll k_0 \frac{\partial F}{\partial z} \quad (6.78)$$

gdzie  $F = \varepsilon, U, V, \phi$ . Dokonawszy takich przybliżeń, czyli pomijając człony zdefiniowane powyżej jako małe, dostajemy układ dwóch równań:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{n}{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\omega_0 c \mu_0}{2n} V \quad (6.79)$$

$$\varepsilon \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{n}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\omega_0 c \mu_0}{2n} U \quad (6.80)$$

Naszym kolejnym zadaniem jest znalezienie związku pomiędzy polaryzacją ośrodka ( $U$  i  $V$ ) a polem elektrycznym. Rozważmy ewolucję macierzy gęstości:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{11} - \rho_{22}) = \frac{2i\mu}{\hbar} E (\rho_{21} - \rho_{12}) \quad (6.81)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{21} = -i\omega \rho_{21} + \frac{i\mu}{\hbar} E (\rho_{11} - \rho_{22}) \quad (6.82)$$

gdzie:  $\mu \equiv \langle 1|\mu_x|2 \rangle = \langle 2|\mu_x|1 \rangle$

oraz  $\hbar\omega = E_2 - E_1$  jest energią przejścia w układzie atomów opisywanych powyższą macierzą gęstości. Powyższe równania różniczkowe opisują macierz gęstości atomów, których częstość przejścia wynosi  $\omega$ . Ogólnie będziemy mieli  $\rho_{ij} = \rho_{ij}(z, t, \Delta\omega)$ , gdzie:  $\Delta\omega := \omega - \omega_0$ . Wtedy wyrażenie na polaryzację będzie miało postać:

$$P(\Delta\omega, z, t) = N\mu (\rho_{21}(\Delta\omega, z, t) + \rho_{12}(\Delta\omega, z, t)) \quad (6.83)$$

Z uwagi na to, że do  $U$  i  $V$  mają wkład atomy ze wszystkimi możliwymi odstrojeniami, możemy napisać:

$$U(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\Delta\omega, z, t) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) \quad (6.84)$$

$$V(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta\omega, z, t) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) \quad (6.85)$$

gdzie  $g$  jest pewną funkcją rozkładu. Poprzez analogię, możemy napisać wyrażenie na polaryzację:

$$\begin{aligned} P(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\Delta\omega, z, t) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) = \\ &= N\mu \int_{-\infty}^{\infty} [\rho_{21}(\Delta\omega, z, t) + \rho_{12}(\Delta\omega, z, t)] g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) \end{aligned} \quad (6.86)$$

Stąd, na mocy (6.74), dostajemy:

$$\rho_{21}(\Delta\omega, z, t) = \frac{1}{2N\mu} [u(\Delta\omega, z, t) + iv(\Delta\omega, z, t)] e^{i(k_0 z - \omega_0 t + \phi(z, t))} \quad (6.87)$$

Stąd dostajemy równania na  $u$  i  $v$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \left( \Delta\omega + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (6.88)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \left( \Delta\omega + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{\mu \varepsilon(z, t)}{\hbar} w \quad (6.89)$$

gdzie  $w$  jest wielkością proporcjonalną do różnicy populacji stanów dolnego i górnego:

$$w(\Delta\omega, z, t) \equiv N\mu [\rho_{11}(\Delta\omega, z, t) - \rho_{22}(\Delta\omega, z, t)] \quad (6.90)$$

Ewolucja  $w$  dana jest wzorem (po dokonaniu przybliżenia RWA):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\mu}{\hbar} \varepsilon(z, t) v \quad (6.91)$$

Komplet powyższych równań nosi nazwę równań Blocha bez zderzeń. Dodając fenomenologiczne czasy relaksacji  $\tau$  i  $T_2$  dostajemy:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \left( \Delta\omega + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{u}{T_2} \quad (6.92)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \left( \Delta\omega + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{\mu \varepsilon(z, t)}{\hbar} w - \frac{v}{T_2} \quad (6.93)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\mu}{\hbar} \varepsilon(z, t) v - \frac{w - w_0}{\tau} \quad (6.94)$$

Korzystając z tych równań, nasze rozdzielone równanie falowe przyjmuje postać:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{n}{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \omega_0 c}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta\omega, z, t) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) \quad (6.95)$$

$$\varepsilon \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{n}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\mu_0 \omega_0 c}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} u(\Delta\omega, z, t) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) \quad (6.96)$$

Powyższe dwa zestawy równań wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi stanowią zespół równań opisujących ewolucję układu atom - promieniowanie. Załóżmy teraz, że  $g$  jest parzystą funkcją  $\Delta\omega$ . Wtedy następujące stwierdzenia są wewnętrznie spójne w ramach powyższych równań:

- $u$  jest nieparzystą funkcją  $\Delta\omega$
- $v$  jest parzystą funkcją  $\Delta\omega$
- $w$  jest parzystą funkcją  $\Delta\omega$
- $\phi(z, t) = 0$

Jak wspomnieliśmy na początku, ograniczamy się do impulsów, których czas trwania jest znacznie mniejszy w porównaniu z charakterystycznymi czasami relaksacji ośrodka,

czyli:  $\tau = \infty$  oraz  $T_2 = \infty$ . Ostatecznie nasze równania przyjmują postać:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v\Delta\omega \quad (6.97)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u\Delta\omega + \frac{\mu\varepsilon(z,t)}{\hbar}w \quad (6.98)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\mu}{\hbar}\varepsilon(z,t)v \quad (6.99)$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} + \frac{n}{c}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = -\frac{\mu_0\omega_0 c}{2n}\int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta\omega, z, t)g(\Delta\omega)d(\Delta\omega) \quad (6.100)$$

Zauważmy, że pierwsze trzy równania można zapisać w postaci wektorowej:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial t} = \vec{T} \times \vec{r} \quad (6.101)$$

$$\vec{r} = \frac{1}{N\mu}(u\vec{e}_u + v\vec{e}_v + w\vec{e}_w) \quad (6.102)$$

$$\vec{t} = -\vec{e}_u\frac{\mu\varepsilon}{\hbar} - \vec{e}_w\Delta\omega \quad (6.103)$$

### TWIERDZENIE O POLU IMPULSU

Udowodnijmy na początku dwa pomocnicze lematy.

*Lemat 1.* Dla atomów, dla których zachodzi  $\Delta\omega = 0$  prawdziwe są stwierdzenia:

$$\begin{aligned} u(0, z, t) &= 0 \\ v(0, z, t) &= w_0 \sin(\theta(z, t)) \\ v(0, z, t) &= w_0 \cos(\theta(z, t)) \end{aligned}$$

gdzie:

$$\theta(z, t) = \frac{\mu}{\hbar} \int_{-\infty}^t \varepsilon(z, t') dt'$$

*Dowód*

W przypadku, gdy  $\Delta\omega = 0$  i zakładając, że  $u(0, z, -\infty) = v(0, z, -\infty) = 0$  mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 &\Rightarrow u(0, z, t) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\mu}{\hbar}\varepsilon w \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\mu}{\hbar}\varepsilon v \end{aligned}$$

Wtedy:

$$\frac{\partial}{\partial t}(v^2 + w^2) = 2v\frac{\partial v}{\partial t} + 2w\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{2\mu}{\hbar}\varepsilon(vw - wv) = 0$$

Zatem możemy napisać:  $v^2 + w^2 = w_0^2$  i ostatecznie:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\mu}{\hbar} \varepsilon \sqrt{w_0^2 - w^2}$$

Stąd, odcałkowując dostajemy:

$$w(0, z, t) = w_0 \cos\left(\frac{\mu}{\hbar} \int_{-\infty}^t \varepsilon(z, t') dt'\right) = w_0 \cos(\theta(z, t))$$

Analogiczne rachunki dają żądany wynik dla  $v$ .

**Lemat 2.** Jeżeli  $\varepsilon(z, t) = 0$  dla  $t \geq t_0$  wtedy dla  $t > t_0$  prawdziwe są stwierdzenia:

$$\begin{aligned} u(\Delta\omega, z, t) &= u_0 \cos(\Delta\omega(t - t_0)) + v_0 \sin(\Delta\omega(t - t_0)) \\ v(\Delta\omega, z, t) &= -u_0 \sin(\Delta\omega(t - t_0)) + v_0 \cos(\Delta\omega(t - t_0)) \\ w(\Delta\omega, z, t) &= w(\Delta\omega, z, t_0) \end{aligned}$$

*Dowód*

Jeżeli  $\varepsilon(z, t) = 0$  dla  $t \geq t_0$ , to:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta\omega \cdot v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\Delta\omega \cdot u \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Analogicznie do dowodu poprzedniego lematu, mamy natychmiast:  $v = \sqrt{u_0^2 + v_0^2 - u^2}$  i otrzymujemy:

$$\frac{du}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 - u^2}} = (\Delta\omega) dt'$$

i całkując od  $t_0$  do  $t$  dostajemy:

$$-\arccos\left(\frac{u'}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}\right)_{u_0}^u = \Delta\omega(t - t_0)$$

Stąd, dokonując przekształceń trygonometrycznych, dostajemy żadaną równość:

$$u(\Delta\omega, z, t) = u_0 \cos(\Delta\omega(t - t_0)) + v_0 \sin(\Delta\omega(t - t_0))$$

Analogiczne rozważania prowadzą do dowodu słuszności wzoru na  $v$ .

Możemy teraz przejść do samego twierdzenia o polu impulsu:

**Twierdzenie**

Niech:

$$\begin{aligned} A(z) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(z, t) = \frac{\mu}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(z, t') dt' \\ \alpha &= \frac{\omega_0 \pi \mu_0 N \mu^2 c g(0)}{n \hbar} \end{aligned}$$

Wtedy:

$$\frac{dA}{dz} = -\frac{\alpha}{2} \sin A$$

*Dowód*

Zauważmy, że:

$$\frac{dA}{dz} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu}{\hbar} \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon(z, t') dt'$$

Ale mamy:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = -\frac{n}{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\mu_0 \omega_0 c}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta\omega, z, t) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega)$$

Zatem otrzymujemy natychmiast:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dz} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \left[ -\frac{n}{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\mu_0 \omega_0 c}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta\omega, z, t) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{n\mu}{c\hbar} [\varepsilon(z, t) - \varepsilon(z, -\infty)] - \frac{\mu_0 \omega_0 c \mu}{2n\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) \int_{-\infty}^t dt' v(\Delta\omega, z, t') \right\} \end{aligned}$$

Ponieważ jednak mamy  $\varepsilon(z, \infty) = \varepsilon(z, -\infty) = 0$ , więc:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dz} &= -\frac{\mu_0 \omega_0 c \mu}{2n\hbar} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega} d(\Delta\omega) \int_{-\infty}^t dt' \frac{\partial}{\partial t'} u(\Delta\omega, z, t') = \\ &= -\frac{\mu_0 \omega_0 c \mu}{2n\hbar} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega} d(\Delta\omega) [u(\Delta\omega, z, t) - u(\Delta\omega, z, -\infty)] = \\ &= -\frac{\mu_0 \omega_0 c \mu}{2n\hbar} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega} d(\Delta\omega) u(\Delta\omega, z, t) \end{aligned}$$

gdyż  $u(\Delta\omega, z, -\infty) = 0$ . Wybierzmy  $t_0$  takie, że dla  $t \geq t_0 \Rightarrow \varepsilon(z, t) \simeq 0$ . Wtedy, korzystając z drugiego lematu mamy:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dz} &= -\frac{\mu_0 \omega_0 c \mu}{2n\hbar} \times \\ &\times \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega} d(\Delta\omega) \{u(\Delta\omega, z, t_0) \cos(\Delta\omega(t - t_0)) + v(\Delta\omega, z, t_0) \sin(\Delta\omega(t - t_0))\} \end{aligned}$$

Z uwagi na pojawienie się oscylacyjnych członów w granicy  $t \rightarrow \infty$  wkłady do całki pochodzą z małego obszaru wokół  $\Delta\omega = 0$ . Jako że  $u(\Delta\omega, z, t_0)$  jest nieparzystą funkcją  $\Delta\omega$ , możemy rozwinąć  $u$  wokół zera:

$$u(\Delta\omega, z, t_0) \simeq a_1 \Delta\omega + a_1 (\Delta\omega)^3$$

Wtedy część całki zawierająca  $u$  będzie postaci:

$$\begin{aligned} -\frac{\mu_0 \omega_0 c \mu}{2n\hbar} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega} d(\Delta\omega) u(\Delta\omega, z, t_0) \cos(\Delta\omega(t - t_0)) \sim \\ \sim \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{g(0) a_1 \sin(\Delta\omega(t - t_0))}{t - t_0} \right)_{-\infty}^{\infty} = 0 \end{aligned}$$

Analogicznie:  $v(\Delta\omega, z, t_0)$  jest parzystą funkcją  $\Delta\omega$ , więc dostajemy:

$$\frac{dA}{dz} = -\frac{\mu_0\omega_0 c\mu}{2n\hbar} v(0, z, t_0) g(0) \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Delta\omega(t - t_0))}{\Delta\omega} d(\Delta\omega)$$

Ostatnia całka wynosi  $\pi$ . Również na mocy obydwu lematów dostajemy:

$$v(o, z, t_0) = w_0 \sin(\theta(z, t_0)) = w_0 \sin A$$

Dostajemy natychmiast:

$$\frac{dA}{dz} = -\frac{\alpha}{2} \sin A$$

## Rozdział 7

# Procesy parametryczne

### 7.1 Równania opisujące wzmocnienie parametryczne

Procesy parametryczne (wzmacnianie parametryczne i oscylacje parametryczne) zachodzą w ośrodkach z nieliniowością drugiego rzędu. Zjawiska te są oparte na tej samej zasadzie co generacja różnicy częstotliwości. Załóżmy, że na wejściu do ośrodka mamy silną wiązkę o częstotliwości  $\omega_3$  (wiązka pompująca) oraz słabą wiązkę o częstotliwości  $\omega_1$  (wiązka sygnałowa), przy czym zachodzi związek  $\omega_3 > \omega_1$ . Jeżeli spełnione będą warunki dopasowania fazowego to w ośrodku będzie zachodził proces, w wyniku którego znikanie fotonów o częstotliwości  $\omega_3$  będzie powodowało przyrost liczby fotonów o częstotliwości  $\omega_1$ . Wzmocnienie wiązki o częstotliwości  $\omega_1$  jest związane z generacją wiązki jałowej o częstotliwości  $\omega_2$  i zachodzi  $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ . Zgodnie z naszym początkowym założeniem w pierwszym przybliżeniu możemy pominąć osłabienie wiązki pompującej i proces ten opisany jest następującymi równaniami ruchu

$$\frac{dA_1}{dz} = i\chi_e A_3 \frac{k_1}{2n^2(\omega_1)} A_2^* \exp\left(-\frac{i}{2}\Delta kz\right) \quad (7.1)$$

$$\frac{dA_2^*}{dz} = -i\chi_e A_3 \frac{k_2}{2n^2(\omega_2)} A_1 \exp\left(\frac{i}{2}\Delta kz\right), \quad (7.2)$$

gdzie  $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2$  oraz  $\chi_e$  jest efektywną podatnością nieliniową drugiego rzędu, którą ze względu na symetrię tensora dielektrycznego omówione wcześniej, możemy zapisać jako  $\chi_e = \hat{e}_1 \cdot \chi^{(2)}(\omega_3, -\omega_2) \hat{e}_3 \hat{e}_2 = \hat{e}_2 \cdot \chi^{(2)}(\omega_3, -\omega_1) \hat{e}_3 \hat{e}_1 = \hat{e}_3 \cdot \chi^{(2)}(\omega_2, \omega_1) \hat{e}_2 \hat{e}_1$ . Założyliśmy dodatkowo, że w ośrodku nie zachodzi pochłanianie fotonów, czyli że ośrodek jest doskonale przezroczysty dla częstotliwości w pobliżu  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Ogólne rozwiązanie układu równań (7.2) przybiera postać

$$A_1(z) = A_1(0) \cosh(bz) \quad (7.3)$$

$$A_2(z) = i \frac{\sqrt{\lambda_2 n(\omega_2)}}{\sqrt{\lambda_1 n(\omega_1)}} A_1(0) \sinh(bz), \quad (7.4)$$

gdzie  $b = \sqrt{g^2 - (\Delta k)^2}$  oraz  $g = \pi \chi_e |A_3(0)| (\lambda_1 \lambda_2 n(\omega_1) n(\omega_2))^{-1}$ . Jak widzimy natężenie obu wiązek, sygnałowej oraz jałowej rosną. Odbywa się to kosztem energii wiązki pompującej<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Pełen układ równań dla obwiedni wszystkich fal biorących udział w procesie ma postać

$$\frac{dA_1}{dz} = -i\kappa A_2^* A_3 \exp(-i\Delta kz) \quad (7.5)$$

$$\frac{dA_2^*}{dz} = i\kappa A_1 A_3^* \exp(i\Delta kz) \quad (7.6)$$

$$\frac{dA_3^*}{dz} = -i\kappa A_1 A_2 \exp(i\Delta kz) \quad (7.7)$$

$$(7.8)$$

## 7.2 Oscylacje parametryczne

Wyobraźmy sobie teraz, że umieściliśmy nieliniowy kryształ w rezonatorze. Nie musimy teraz zapewnić pojawiania się na wejściu do kryształu wiązki sygnałowej, bowiem rezonator zapewnia wzmacnianie sygnałów o pewnych częstościach. To wzmocnienie może być zapoczątkowane szumem kwantowym. Wśród tych częstości powinna się znaleźć częstość wiązki sygnałowej, ale może także, choć nie musi, do nich należeć wiązka jałowa. W tym przypadku musimy uwzględnić straty na lustrach, uczynimy to definiując stałą tłumienia  $\alpha_L$ :

$$\alpha_L L = 1 - R_i \quad (7.10)$$

Rozpatrzmy najpierw przypadek równowagi, kiedy straty są równe wzmocnieniu; mamy wówczas:

$$\frac{d}{dz} A_1 = \frac{d}{dz} A_2 = 0 \quad (7.11)$$

Z równań na propagację otrzymujemy:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\alpha_1 A_1 - ig A_2^* &= 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha_2 A_2^* + ig A_1 &= 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

Aby istniały rozwiązania układu równań (7.12) musi zniknąć wyznacznik, a więc:

$$g_t = \frac{1}{4}\alpha_1\alpha_2 \quad (7.13)$$

Jest to pierwsze bardzo proste spojrzenie na rezonans parametryczny. Praktyczne zastosowanie rezonansu parametrycznego to przede wszystkim możliwość generowania spójnej wiązki i obniżonej częstości, w dodatku mamy możliwość skanowania częstości wiązki sygnałowej w szerokim zakresie częstości. Po tym pierwszym, bardzo uproszczonym opisie, przejdźmy do dokładniejszej analizy zjawiska. Rozważmy wektor składający się z obwiedni wiązek sygnałowej i jałowej:

$$\vec{A}(z) = \begin{pmatrix} A_1(z)e^{ik_1 z} \\ A_2^*(z)e^{ik_2 z} \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

Propagację tego wektora poprzez kryształ opisuje macierz wyznaczona przez rozwiązania (??):

$$\vec{A}(l) = \begin{bmatrix} e^{i(k_1+\Delta k)l} [\cosh(bl) - \frac{i\Delta k}{b} \sinh(bl)] & -ie^{i(k_2+\Delta k)l} \frac{g}{b} \sinh(bl) \\ e^{i(k_2+\Delta k)l} \frac{g}{b} \sinh(bl) & e^{i(k_2+\Delta k)l} [\cosh(bl) - \frac{i\Delta k}{b} \sinh(bl)] \end{bmatrix} \cdot \vec{A}(0) \quad (7.15)$$

i aby był stan stacjonarny (zakładamy  $\Delta k = 0$ ), musi być spełniony warunek:  $A_l = A_a$ . Zauważmy dodatkowo, że wiązka pompująca praktycznie przechodzi przez rezonator bez odbicia. Rozważmy teraz pełen cykl rozchodzenia się wiązki w rezonatorze. Przemieszcza się ona raz w kierunku zgodnym z kierunkiem wiązki pompującej, raz w kierunku przeciwnym do kierunku wiązki pompującej (wówczas można pominąć jakiekolwiek oddziaływanie pomiędzy wiązkami), i dodatkowo dwa razy zachodzi odbicie od zwierciadeł umieszczonych na końcach rezonatora. Możemy to zapisać jako iloczyn czterech macierzy:

$$A_l = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-ik_1 l} & 0 \\ 0 & e^{ik_2 l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(gl)e^{ik_1 l} & -i \sinh(gl)e^{-ik_1 l} \\ \sinh(gl)e^{ik_2 l} & \cosh(gl)e^{ik_2 l} \end{bmatrix} \cdot A_a \quad (7.16)$$

Można pokazać, że zachowane są relacje Manley'a - Rowe'a, to znaczy spełnione jest równanie

$$-\frac{d}{dz}(A_3^* A_3) = \frac{d}{dz}(A_1^* A_1) = \frac{d}{dz}(A_2^* A_2) \quad (7.9)$$

Iloczyn  $(A_j A_j^*)$  jest proporcjonalny do strumienia fotonów o częstości  $\omega_j$ . A zatem równanie (7.9) oznacza, że za każdym razem, gdy kreowany jest foton o częstości  $\omega_1$ , w wiązce sygnałowej, powstaje również foton w wiązce jałowej i jednocześnie znika jeden foton w wiązce pompującej.



Sytuację tę ilustruje rysunek 1. Otrzymamy równanie:  $A_l = \hat{M} A_a$ , gdzie macierz  $\hat{M}$  dana jest wzorem:

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} r_1^2 \cosh(gl) e^{-2ik_1 l} & -ir_2^2 \sinh(gl) e^{-2ik_1 l} \\ i(r_2^*)^2 \sinh(gl) e^{2ik_2 l} & (r_2^*)^2 \cosh(gl) e^{2ik_2 l} \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

Warunek analogiczny do warunku (7.13) przyjmuje teraz postać  $\det(M - \mathbf{I}) = 0$  czyli:

$$\begin{aligned} (r_1^2 \cosh(gl) e^{-2ik_1 l} - 1) \cdot ((r_2^*)^2 \cosh(gl) e^{2ik_2 l} - 1) &= \\ = (r_2^*)^2 r_1^2 \sinh^2(gl) e^{-2i(k_2 - k_1)l} & \end{aligned} \quad (7.18)$$

Jest to warunek progowy dla oscylatora parametrycznego. Przypomnijmy, że rozważamy przypadek dopasowania fazowego  $\Delta k = 0$ , a zatem  $b = g$ , a współczynnik wzmocnienia  $g$  zawiera w sobie natężenie wiązki pompującej. Jest to zatem przede wszystkim warunek na natężenie wiązki pompującej. Można wykazać, że minimalną wartość stałej wzmocnienia w warunku (7.18) otrzymamy, gdy kiedy oba współczynniki znajdujące się po prawej stronie równania (7.18) będą wielkościami rzeczywistymi, czyli gdy

$$\phi_i - 2k_i l = 2m_i \pi \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots \quad (7.19)$$

gdzie zostało zdefiniowane poprzez równanie Warto zauważyć, że warunki (7.19) są równoważne temu, aby oba mody, wiązki sygnałowej i wiązki jałowej były zgodne z modami podłużnymi wnęki rezonatora. Rozważymy teraz dwa podstawowe przypadki podwójnego i pojedynczego rezonansu parametrycznego.

### 7.2.1 Podwójny rezonans parametryczny

W tym przypadku zakładamy występowanie podwójnego rezonansu, dla obu wiązek, sygnałowej oraz jałowej. Podstawiając (7.19) do (7.18) otrzymujemy warunek:

$$(R_1 + R_2) \cosh(gl) - R_1 R_2 = 1 \quad (7.20)$$

Jeśli założymy, że współczynniki odbicia luster są dla obu częstotści równe w przybliżeniu 1, oraz rozwinie my cosh w szereg Taylora, to otrzymamy

$$gl = \sqrt{(1 - R_1)(1 - R_2)} \quad (7.21)$$

Jeśli ten warunek będzie spełniony, mamy szansę na podwójny rezonans parametryczny. Po drodze jednak założyliśmy kilka innych warunków; przypomnijmy je teraz. Po pierwsze musi być oczywiście  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Warunki (7.19) oznaczają, że musi być także

$$\frac{\omega_i n_i l}{c} = m_i \pi + \phi_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots \quad (7.22)$$

Jest to bardzo silny i trudny do spełnienia warunek. Długość wnęki rezonansowej ulega fluktuacjom, i jeśli warunki (7.22) są spełnione dla pewnej wartości  $l$ , to trudno zagwarantować ich spełnienie dla innej wartości długości wnęki rezonansowej i wymaga to zmiany częstotści, nawet bardzo znacznej. (dodać dyskusję) Dlatego na ogół stosuje się przypadek pojedynczego rezonansu, ograniczając się tylko do rezonansu dla wiązki sygnałowej.

### 7.2.2 Pojedynczy rezonans parametryczny

W tym przypadku, jak już wspomnieliśmy pragniemy zapewnić warunki rezonansu jedynie dla wiązki sygnałowej. Wówczas możemy sobie pozwolić na to aby wiązki nie propagowały wzdłuż tego samego kierunku. Typowa sytuacja eksperymentalna jest przedstawiona na rysunku 2. Na rysunku pokazano kierunki propagacji wszystkich wiązek biorących udział w procesie. Jak widzimy jedynie wiązka sygnałowa rozchodzi się w kierunku osi rezonatora a warunek dopasowania fazowego na teraz charakter wektorowy:

$$\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \quad (7.23)$$

Długość wektora  $\vec{k}_1$  oraz długość i kierunek wektora  $\vec{k}_2$  dopasowują się automatycznie, tak aby był spełniony warunek  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Warunek wystąpienia oscylacji parametrycznych w tym przypadku upraszcza się do (kładziemy  $r_2 = 0$ )

$$\frac{\omega_1 n_1 I}{c} = m_1 \pi + \phi_1 \quad (7.24)$$

$$gl = \sqrt{2(1 - R_1)} \quad (7.25)$$

### 7.3 Strojenie częstości w procesach parametrycznych

W przypadku oscylatora parametrycznego, w odróżnieniu od lasera, nie występuje przejście rezonansowe, i dlatego jesteśmy w stanie przestrajać częstość wiązki sygnałowej w bardzo szerokim zakresie. Musimy jedynie zapewnić spełnienie warunku dopasowania fazowego:

$$\omega_3 n_3 = \omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 \quad (7.26)$$

oraz dopasowania częstości:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \quad (7.27)$$

Warunek (7.26) jest oczywiście równoważny warunkowi  $k_3 = k_1 + k_2$ . W nieizotropowym kryształach nieliniowych współczynniki załamania dla poszczególnych wiązek zależą w ogólnym przypadku od kierunku rozchodzenia się tych wiązek, temperatury i ciśnienia. Mamy zatem spory wachlarz różnych parametrów, którymi możemy manipulować aby wybrać odpowiednią częstość wiązki sygnałowej (różne rodzaje strojenia). W ramach tego wykładu przeanalizujemy jedynie strojenie kątowe. Rozważmy pewną wartość kąta pomiędzy kierunkiem osi rezonatora i kierunkiem osi optycznej kryształu (ograniczmy się do przypadku kryształu jednoosiowego). Warunek (7.26) możemy zapisać jako

$$\omega_3 n_{30}(\vartheta_0) = \omega_{10} n_{10} + \omega_{20} n_{20} \quad (7.28)$$

Wyobraźmy sobie teraz, że obracamy kryształem, zmieniając wartość kąta  $\vartheta_0$  o małą wartość  $\theta_0$ . Powoduje to, że rezonansowe wartości częstości wiązek sygnałowej i jałowej zmieniają się nieznacznie. Te zmiany podsumowaliśmy w poniższych wzorach:

### SPRAWDZIĆ BŁĘDY

$$\omega_3 \rightarrow \omega_3 \quad (7.29)$$

$$n_{30} \rightarrow n_{30} + \Delta n_3 \quad (7.30)$$

$$n_{10} \rightarrow n_{10} + \Delta n_1 \quad (7.31)$$

$$n_{20} \rightarrow n_{20} + \Delta n_2 \quad (7.32)$$

$$\omega_{10} \rightarrow \omega_{10} + \Delta \omega_1 \quad (7.33)$$

$$\omega_{20} \rightarrow \omega_{20} + \Delta \omega_2 \quad (7.34)$$

$$\Delta \omega_2 \rightarrow -\Delta \omega_1 \quad (7.35)$$

Ponieważ musi być spełniony warunek (7.26), to dla nowych częstości musimy mieć:

$$\begin{aligned} \omega_3(n_{30} + \Delta n_3) &= (\omega_{30} + \Delta \omega_1) \cdot (n_{10} + \Delta n_1) + \\ &+ (\omega_{20} + \Delta \omega_2) \cdot (n_{20} + \Delta n_2) \end{aligned} \quad (7.36)$$

a zatem pomijając małe drugiego rzędu otrzymujemy:

$$\Delta \omega_1|_{\vartheta=\vartheta_0} = \frac{\omega_3 \Delta n_3 - \omega_{10} \Delta n_1 - \omega_{20} \Delta n_2}{n_{10} - n_{20}} \quad (7.37)$$

Wiązka pompująca jest skonstruowana z promieni nadzwyczajnych, a wiązki sygnałowa i jałowa z promieni zwyczajnych i dla nich współczynnik załamania nie zależy od kąta  $\theta$ . Możemy zatem zapisać małe zmiany współczynnika załamania jako:

$$\Delta n_1 = \left. \frac{\partial n_1}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_{10}} \Delta \omega_1 \quad (7.38)$$

$$\Delta n_2 = \left. \frac{\partial n_2}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_{20}} \Delta \omega_2 \quad (7.39)$$

$$\Delta n_3 = \left. \frac{\partial n_3}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_{30}} \Delta \omega_3 \quad (7.40)$$

Jeśli dodatkowo zauważymy, że  $\Delta \omega_1 = -\Delta \omega_2$ , to możemy zapisać zmianę częstości wiązki sygnałowej jako:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \vartheta} = \left( \omega_3 \frac{\partial n_3}{\partial \vartheta} \right) \cdot \left[ (n_{10} - n_{20}) + \left( \omega_{10} \frac{\partial n_1}{\partial \vartheta} - \omega_{20} \frac{\partial n_2}{\partial \vartheta} \right) \right]^{-1} \quad (7.41)$$

Uwzględniając dodatkowo

$$\frac{\partial n_3}{\partial \vartheta} = -\frac{n_3^2}{2} \sin(2\vartheta) \left[ (n_e(\omega_3))^{-2} - (n_o(\omega_3))^{-2} \right] \quad (7.42)$$

i ostatecznie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial \vartheta} &= -\frac{n_3^2}{2} \sin(2\vartheta) \left[ (n_e(\omega_3))^{-2} - (n_o(\omega_3))^{-2} \right] \omega_3 \times \\ &\times \left[ (n_{10} - n_{20}) + \left( \omega_{10} \frac{\partial n_1}{\partial \vartheta} - \omega_{20} \frac{\partial n_2}{\partial \vartheta} \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (7.43)$$

Na rysunku 3 przedstawiono zależność częstości wiązki sygnałowej od kąta pomiędzy kierunkiem propagacji wiązki oraz kierunkiem osi optycznej kryształu. Jest to przypadek kryształu ADP. Na rysunku porównano wyniki otrzymane w eksperymencie z krzywą teoretyczną (parabola).

## 7.4 Parametryczne podwyższanie częstości

Parametryczne procesy w kryształach mogą być używane do podwyższania częstości spójnego sygnału optycznego, poprzez zamianę sygnału o "małej częstości"  $\omega_1$  na sygnał o "dużej częstości"  $\omega_3$ , w procesie mieszania z silną wiązką laserową o częstości  $\omega_2$ , jeśli spełniony jest warunek

$$\omega_3 = \omega_2 + \omega_1 \quad (7.44)$$

Najprościej jest zrozumieć istotę tego zjawiska, jeśli myślimy o pojedynczych fotonach. W zjawisku parametrycznego podwyższania częstości anihilowane są dwa fotony, jeden z wiązki sygnałowej o częstości  $\omega_1$ , oraz jeden z silnej wiązki laserowej - foton o częstości  $\omega_2$ , i jednocześnie kreowany jest foton o częstości  $\omega_3$ . Zasada zachowania energii jest spełniona o ile prawdziwy jest związek (7.44). Aby jednocześnie spełniona była zasada zachowania pędu, musi być także spełniony warunek

$$\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \quad (7.45)$$

, który określa kierunek wiązki o podwyższonej częstości i określa jej centralny wektor faliowy. Dodatkowo zauważamy, że ilość fotonów w powstającej wiązce nie może być większa niż ilość fotonów w wiązce sygnałowej.

Schemat doświadczalny układu, w którym taki proces zachodzi przedstawiliśmy na rysunku (3). Wiązki o częstościach  $\omega_1$  oraz  $\omega_2$  przechodzą przez lustro częściowo odbijające, i rozchodzą się współosiowo w kryształach nieliniowych o długości  $l$ . Na wyjściu kryształu umieszczamy dodatkowy filtr optyczny, który

jest przepuszczalny jedynie dla fotonów o częstotliwości  $\omega_3$ . Przeanalizujmy teraz to zjawisko ilościowo. Zakładamy, że wiązka laserowa jest tak silna, że jej obwiednia nie zmienia się w trakcie oddziaływania w kryształach. Amplitudy wiązek o częstotliwościach  $\omega_1$  oraz  $\omega_3$  możemy wówczas opisać równaniami:

$$\frac{dA_1}{dz} = -igA_3 \quad (7.46)$$

$$\frac{dA_3}{dz} = -igA_1$$

gdzie:

$$g = 2\sqrt{\frac{\mu_0\omega_1\omega_3}{\varepsilon_0 n_1 n_3}} dE_2.$$

Przy wyprowadzeniu równań (7.46) założyliśmy dodatkowo, że na wejściu faza wiązki laserowej była równa zero, i że w trakcie propagacji wiązek w kryształach nie występują żadne dodatkowe procesy pochłaniania. Rozwiązanie układu równań (7.46) ma postać:

$$A_1(z) = A_1(0) \cos(gz) - iA_3(0) \sin(gz) \quad (7.47)$$

$$A_3(z) = A_3(0) \cos(gz) - iA_1(0) \sin(gz) \quad (7.48)$$

i jeśli dodatkowo założymy, że na początku procesu, na wejściu do kryształu nie było fotonów o podwyższonej częstotliwości, to otrzymamy:

$$|A_1(z)|^2 = |A_1(0)|^2 \cos^2(gz) \quad (7.49)$$

$$|A_3(z)|^2 = |A_1(0)|^2 \sin^2(gz) \quad (7.50)$$

i jednocześnie spełniony jest warunek:

$$|A_1(z)|^2 + |A_3(z)|^2 = |A_1(0)|^2 \quad (7.51)$$

Wielkość  $|A_l(z)|^2$  jest proporcjonalna strumienia fotonów o częstotliwości  $\omega_l$ , a zatem w kryształach, dla dowolnej długości drogi propagacji wiązek  $z$ , suma liczby fotonów o częstotliwościach  $\omega_1$  oraz  $\omega_3$  jest zachowana. Możemy też powyższe zależności wyrazić poprzez moce rozchodzących się wiązek, przy czym zachodzi

$$P_1(z) = P_1(0) \cos^2(gz) \quad (7.52)$$

$$P_3(z) = \frac{\omega_3}{\omega_1} P_1(0) \sin^2(gz) \quad (7.53)$$

a zatem efektywność całego procesu, czyli końcowa moc wiązki o podwyższonej częstotliwości w stosunku do początkowej mocy przetwarzanej wiązki o niższej częstotliwości wynosi

$$\frac{P_3(l)}{P_1(0)} = \frac{\omega_3}{\omega_1} \sin^2(gl) \quad (7.54)$$

i może osiągnąć maksymalnie wartość równą  $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ , wówczas gdy wszystkie fotony z wiązki o częstotliwości  $\omega_1$  zostaną przetworzone w fotony o częstotliwości  $\omega_3$ . W praktyce ta maksymalna wartość nie jest osiągana, i zazwyczaj stopień konwersji jest niewielki, tak że możemy sinus we wzorze (7.54) zastąpić pierwszym wyrazem rozwinięcia w szereg Taylora

$$\frac{P_3(l)}{P_1(0)} = \frac{\omega_3}{\omega_1} (gl)^2 \quad (7.55)$$

a po podstawieniu wartości współczynnika  $g$  i wprowadzeniu mocy wiązki laserowej  $P_2 = E_2/A$  ( $A$  jest polem przekroju poprzecznego oddziałujących wiązek), mamy ostatecznie

$$\frac{P_3(l)}{P_1(0)} = \frac{2\omega_3^2 l^2 d^2}{n_1 n_2 n_3} \left( \frac{\mu_0}{\varepsilon_2} \right)^{3/2} \frac{P_2}{A} \quad (7.56)$$

## 7.5 Klasyfikacja procesów parametrycznych

W ostatniej części wykładu, w charakterze podsumowania, podamy kryteria, które pomogą nam rozstrzygnąć jaki proces parametryczny ma szansę zaistnieć w konkretnych warunkach doświadczalnych. Na wstępie zakładamy, że w naszym procesie występują fotony o częstościach  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  oraz  $\omega_3$ , i że w pojedynczym akcie oddziaływania bierze udział po jednym z atomów każdego rodzaju. Założymy także, że propagacja wiązek jest z dobrym przybliżeniem współosiowa i początkowo mamy jedynie dwie wiązki: silną wiązkę laserową o częstości  $\omega_2$  oraz wiązkę sygnałową o częstości  $\omega_1$ . Możliwe są wówczas dwa przypadki:

**a)**  $\omega_1 > \omega_2$

W tym przypadku możliwe są dwa procesy, przedstawione schematycznie na rysunku (4). W pierwszym z tych procesów jeden foton o częstości znika i pojawiają się jego kosztem dwa fotony o częstościach  $\omega_2$  i  $\omega_3$ . Zgodnie z zasadą zachowania energii musi być wówczas spełniony warunek (a1)  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ . Na rysunku (5) przedstawiono schematycznie amplitudy wszystkich trzech fal biorących udział w procesie. Drugim możliwym procesem jest generacja sumy częstości, mamy wówczas (a2)  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Zachowanie się amplitud poszczególnych fal w czasie propagacji w kryształach przedstawiono na rysunku (6). Oba procesy wymagają obecności takich samych fotonów oba warunki (a1) oraz (a2) mogą być spełnione, a więc o tym który z procesów będzie zachodził decydować musi dopasowanie fazowe. Jeśli poprzez odpowiednią orientację kryształu nieliniowego będzie możliwe spełnienie warunku dopasowania fazowego  $\vec{k}_1 = \vec{k}_3 + \vec{k}_2$  to w układzie będzie generowana różnica częstości (proces pierwszy), a jeśli będziemy bliżej spełnienia warunku  $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$  to procesem dominującym będzie generacja sumy częstości.

**a)**  $\omega_1 < \omega_2$

W tym przypadku możliwe są również dwa procesy. Jeden z nich to generacja sumy częstości, proces identyczny do drugiego z procesów opisanych w poprzednim punkcie. Drugi możliwy proces to proces wzmacniania parametrycznego. W tym procesie jeden z fotonów z silnej wiązki laserowej znika i jego kosztem pojawiają się dwa fotony, jeden o częstości  $\omega_1$  a drugi o częstości  $\omega_3 = \omega_2 - \omega_1$ . Podobnie jak w poprzednim przypadku, w eksperymencie wystąpi proces, dla którego zagwarantujemy dopasowanie fazowe.