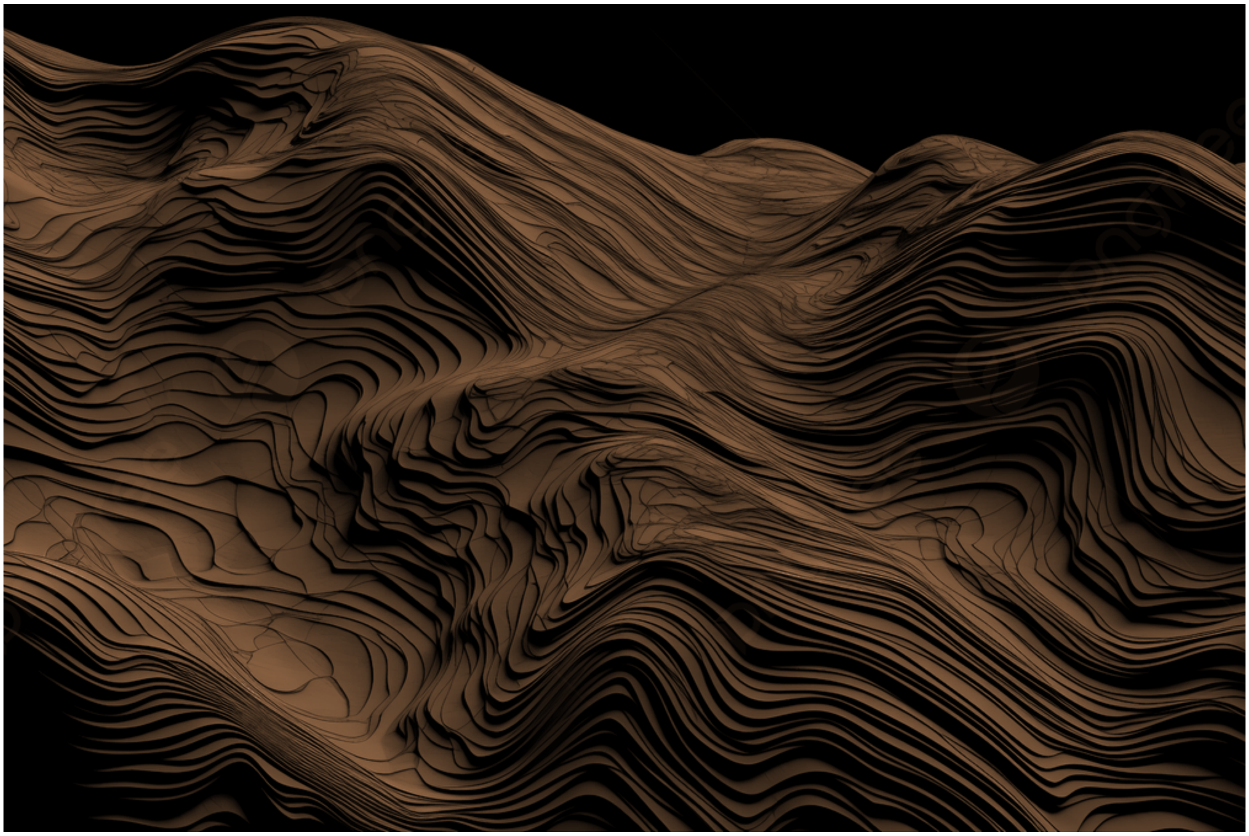


# Trodimenzionalna segmentacija površi

03.06.2024

Stefanija Marković

Mihailo Simić

Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

## Uvod

U oblasti računarske topologije, razumevanje strukture i karakteristika trodimenzionalne površina je od suštinskog značaja. Jedan efikasan metod za analizu ovakvih površina je korišćenje konturnih stabala i perzistentne homologije. Ovaj dokument istražuje segmentaciju trodimenzionalne površine definisane funkcijom visine na dvodimenzionalnoj mreži. Kako se visina povećava, površina doživljava topološke promene gde se konture pojavljuju, dele, spajaju ili nestaju. Beleženje ovih promena i njihovih odnosa predstavlja osnovu naše analize.

Konturno stablo je topološka struktura koja prikazuje evoluciju kontura na površini. Čvorovi u kontur stablu odgovaraju specifičnim konturama, dok ivice ilustruju topološke transformacije kao što su kreiranje, spajanje ili deljenje ovih kontura. Konstruišući konturno stablo, možemo sistematski segmentisati površinu na značajne regione zasnovane na ovim topološkim karakteristikama.

Perzistentna homologija, još jedan ključni koncept u računarskoj topologiji, pruža način za kvantifikovanje značaja ovih karakteristika kroz više skala. Računanjem perzistentne homologije površine, možemo identifikovati koje topološke karakteristike su postojane, a koje su prolazne, što omogućava robusniju segmentaciju.

## Ciljevi

I. Funkije 3D površi, analiza i primeri.
II. Segmentna stabla.
III. Konturna stabla i perzistentna homologija.
IV. Vizualizacije.

# Funkcije 3D površi

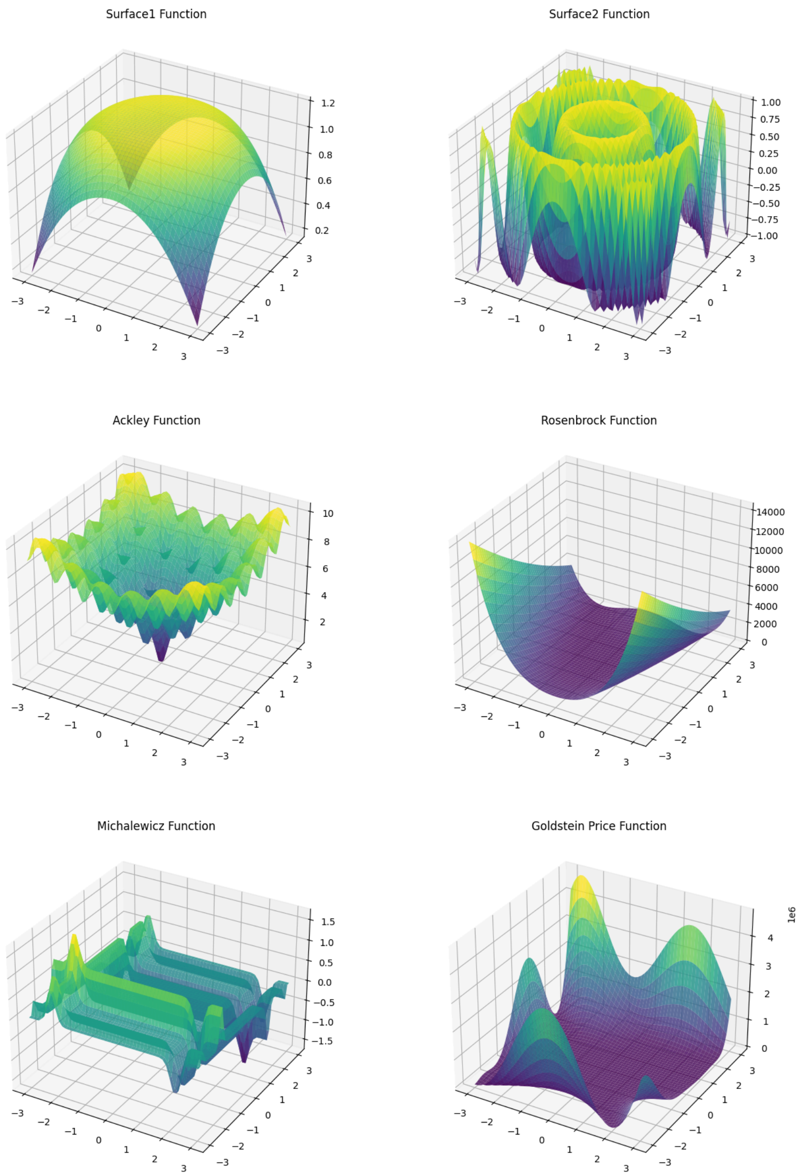
## Uvod

U ovom poglavlju, istražujemo proučavanje 3D funkcija definisanih na 2D mreži, gde visina služi kao vrednost funkcije. Ove funkcije obuhvataju složene pejzaže sa raznolikim terenskim karakteristikama, pružajući bogato polje testiranja za algoritme u oblastima kao što su optimizacija, mašinsko učenje i računarska geometrija.

Funkcija visine, koja mapira svaku tačku na 2D mreži na odgovarajuću visinu, stvara trodimenzionalnu površinu koja imitira prirodne pejzaže, terenske mape ili veštačke strukture. Variranjem parametara i konfiguracija, možemo generisati spektar pejzaža, od glatkih i blagih padina do grubih i stenovitih terena, svaki pružajući jedinstvene izazove i mogućnosti za algoritamsko istraživanje.

Ovde smo izabrali 8 različitih funkcija koje predstavljaju 3d povrsi. Neke od njih su veoma jednostavne i glatke (kao na primer funkcija sinusa kvadrata), dok su neke multimodalne sa velikim brojem lokalnih ekstremuma (primer *Rastrigin function*). Ove multimodalne funkcije povrsi se često koriste za evaluaciju algoritama lokalne pretrage i linearne optimizacije, te one možda nisu realan prikaz neke površi koja bi se mogla naći u prirodi, ali svakako predstavlja dobar primer za mogućnosti koje nam donose topološke metode u računarstvu.

Na slici ispod se mogu videti vizualizacije korišćenih funkcija 3d površi




U nastavu smo se odlučili da koristimo *Himmelblau Funkciju* kao primer kroz koji ćemo pokazati topološke metode za segmentaciju 3D površi, kao i korake koje smo radili da dođemo do rezultata. Na kraju u poslednjem delu *"Vizualizacije"* ćemo pokazati samo rezultate primena topoloških metoda na svakoj od gore navedenih funkcija kao pokazatelj koliko efikasnost ovog pristupa može varirati u zavisnosti od složenosti i izgleda 3D površi koju segmentišemo.

U ovom radu je korišćen programski jezik Python, kao i naredne biblioteke: NumPy, Matplotlib (vizualizacije), GUDHI (za topološke strukture), kao i NetworkX za manipulaciju i održavanje strukture stabla.

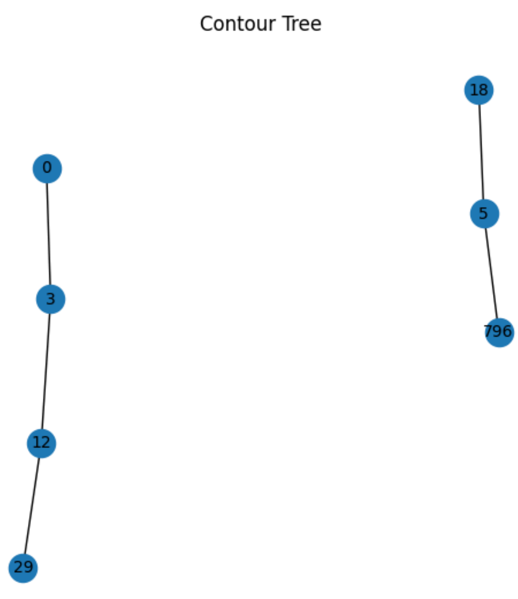
# Konturna Stabla

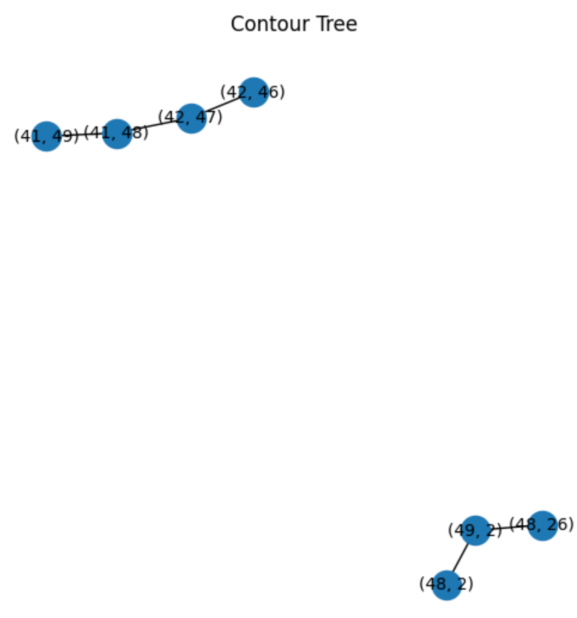
U našem projektu, koristimo konturna stabla za segmentaciju date 3D površi definisane funkcijom visine preko 2D mreže. Analizirajući kako se konture menjaju dok prelazimo različite nivoe visine, možemo identifikovati značajne topološke karakteristike i regione na površini. Ovaj pristup omogućava segmentaciju površine zasnovanu na njenim prirodnim topološkim svojstvima, pružajući uvide koji prevazilaze jednostavnu geometrijsku analizu.

Izgradnja konturnog stabla uključuje:

1. **Sortiranje Tačaka po Visini**: Počinjemo sortiranjem tačaka na mreži prema njihovim visinskim vrednostima.
2. **Praćenje Kontura**: Dok obrađujemo svaku tačku, pratimo stvaranje i spajanje kontura.
3. **Izgradnja Stabla**: Kreiramo čvorove za svaku kritičnu tačku i ivice koje predstavljaju spajanje i deljenje kontura.

Na slikama ispod možemo videti prikaz jednog konturnog stabla koje smo kreirali.




Obe slike predstavljaju isto konturno stablo sa tim što leva slika prikazuje redne brojeve čvorova dok desna prikazuje njihove koordinate na 2D mreži (x i y).

## Simpleksna stabla i perzistentna homologija

Nakon kreiranja konturnog stabla krenućemo u dublju analizu naše 3d površi koristeći perzistentnu homologiju. Pre nego što dođemo do homologije i perzistencije moramo prvo da napravimo simpleksno stablo.

Simpleksno stablo je struktura podataka koja se koristi za predstavljanje simplicijalnih kompleksa. Simplicijalni kompleksi su kombinatorne strukture sačinjene od simpleksa (tačaka, ivica, trouglova i njihovih višedimenzionalnih ekvivalenata) koje se koriste za modelovanje oblika podataka. Simpleksno stablo efikasno čuva odnose između ovih simpleksa, omogućavajući brze izmene.

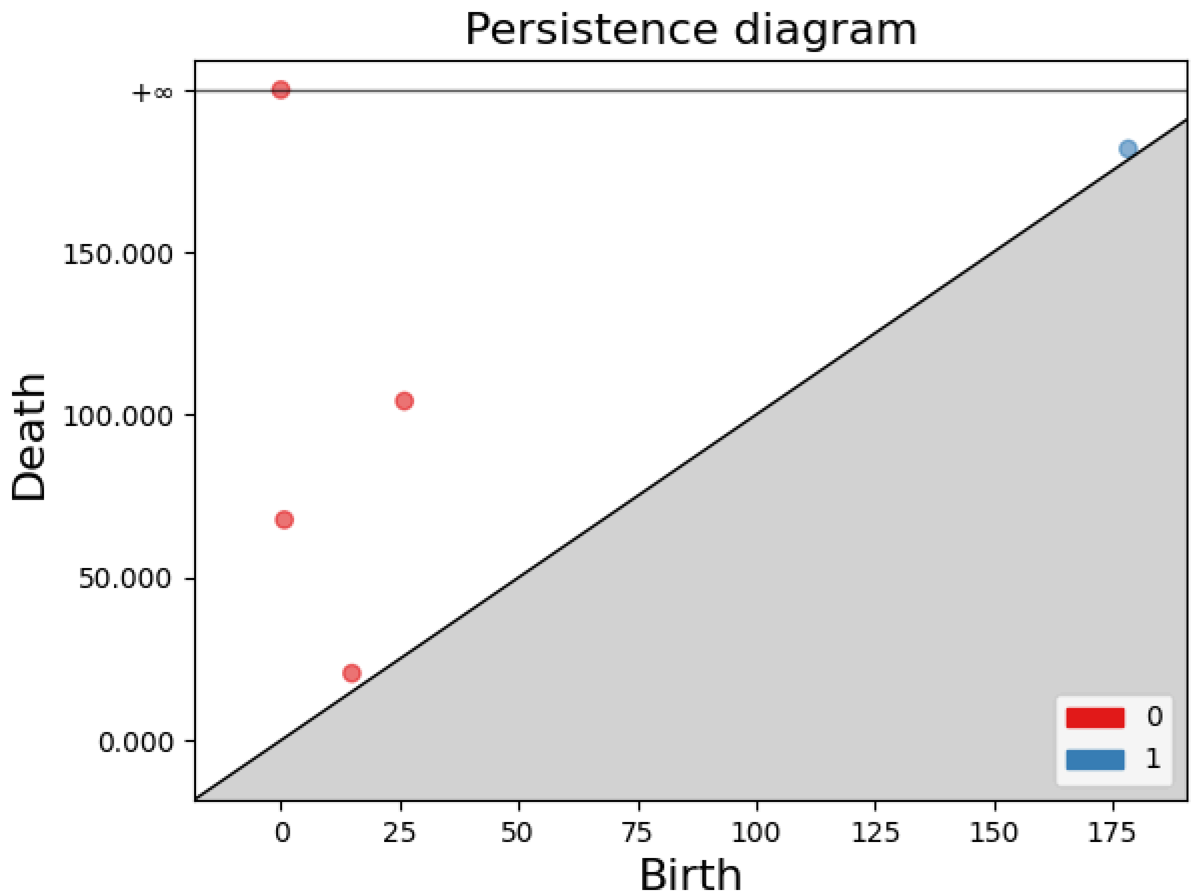
U našem projektu, simpleksno stablo nam omogućava da izgradimo i manipulišemo topološkom strukturom 3D površine definisane funkcijom visine na 2D mreži. Umetanjem tačaka, ivica i višedimenzionalnih simpleksa u stablo, možemo predstaviti topologiju površine i izvoditi različite proračune na njoj. Iz napravljenog simpleksnog stabla možemo izvići podatke kao što su dimenzija simplesnog stabla, broj tačaka, kao i broj simpleksa koje grade to stablo. U našem slučaju smo dobili simpleksno stablo dimenzije 2, imali smo 2500 tačaka (jer smo radili na 2D mrezi koja ima dimenziju 50x50 tačaka na svakoj osi), i broj simpleksa u stablu 14603 odnosno 17004 u zavisnosti od metode kojom smo ubacivali simplekse (slika ispod). Prilikom kreiranja samog simpleksnog stabla, za svaku tačku na površi smo postavili njene *x* i *y* koordinate, a pošto koristimo 3D površ definisanu kao funkcija visine na 2D mreži, upravo ova *z* vrednost visine se prirodno nameće kao filtracija.

```
Dimension of the simplex tree:2
Number of vertices: 2500
Number of simplices: 14603
==================================
Dimension of the simplex tree:2
Number of vertices: 2500
Number of simplices: 17004
```

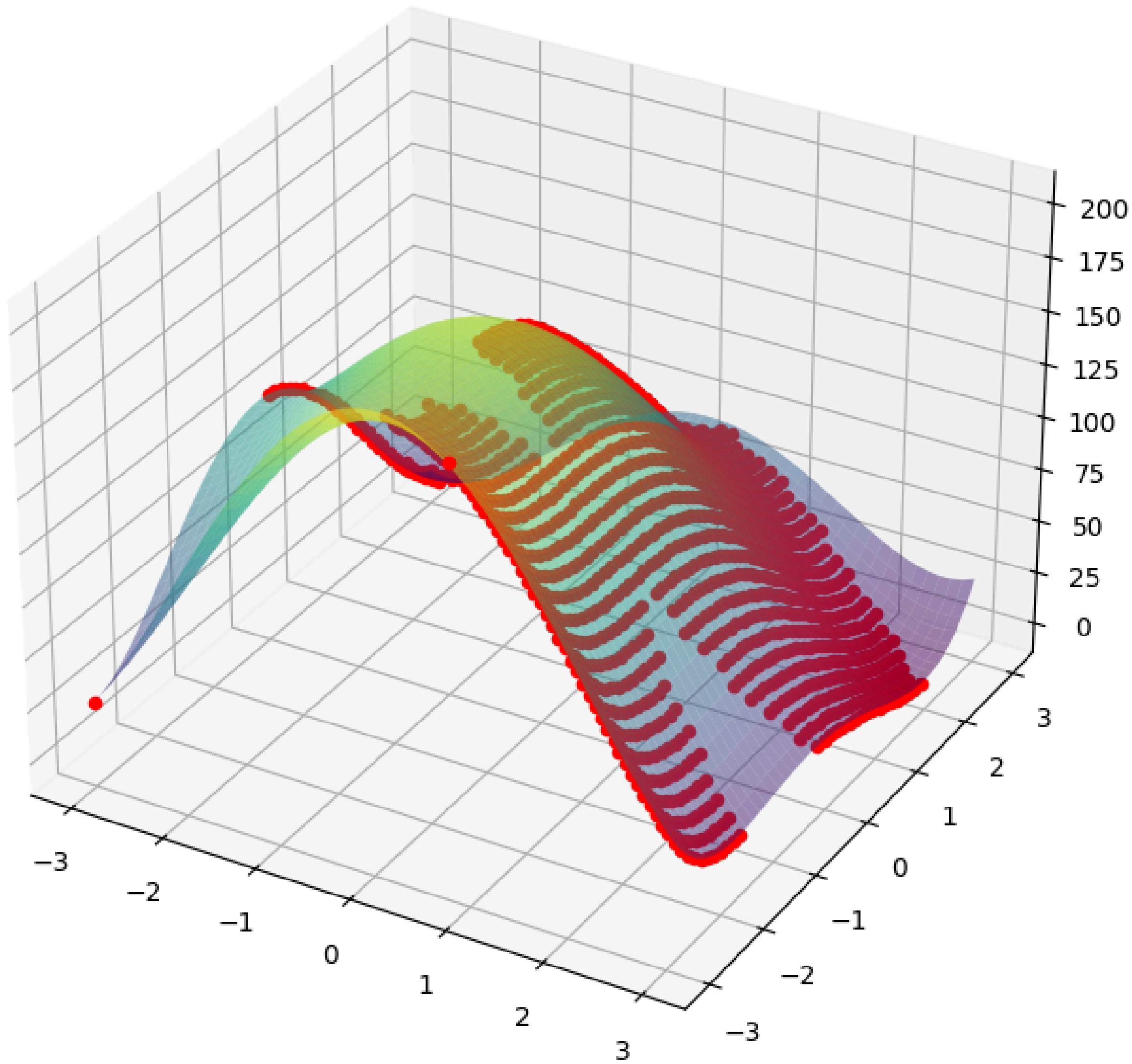
Perzistentna homologija je metoda koja se koristi za proučavanje promena u topološkim karakteristikama prostora kroz više skala. Ona pruža način za merenje značaja ovih karakteristika praćenjem njihove postojanosti kroz različite skale. Ključne topološke karakteristike uključuju povezane komponente (0-dimenzionalne rupe), petlje (1-dimenzionalne rupe) i šupljine (2-dimenzionalne rupe).

Računanjem perzistentne homologije možemo generisati dijagram postojanosti, koji prikazuje rađanje i nestajanje topoloških karakteristika. Ovaj dijagram nam pomaže da identifikujemo koje su karakteristike značajne, a koje su verovatno šum.

Na slici ispod možemo videti dijagram perzistencije simpleksnog stabla kreiranog nad našom 3D površi.

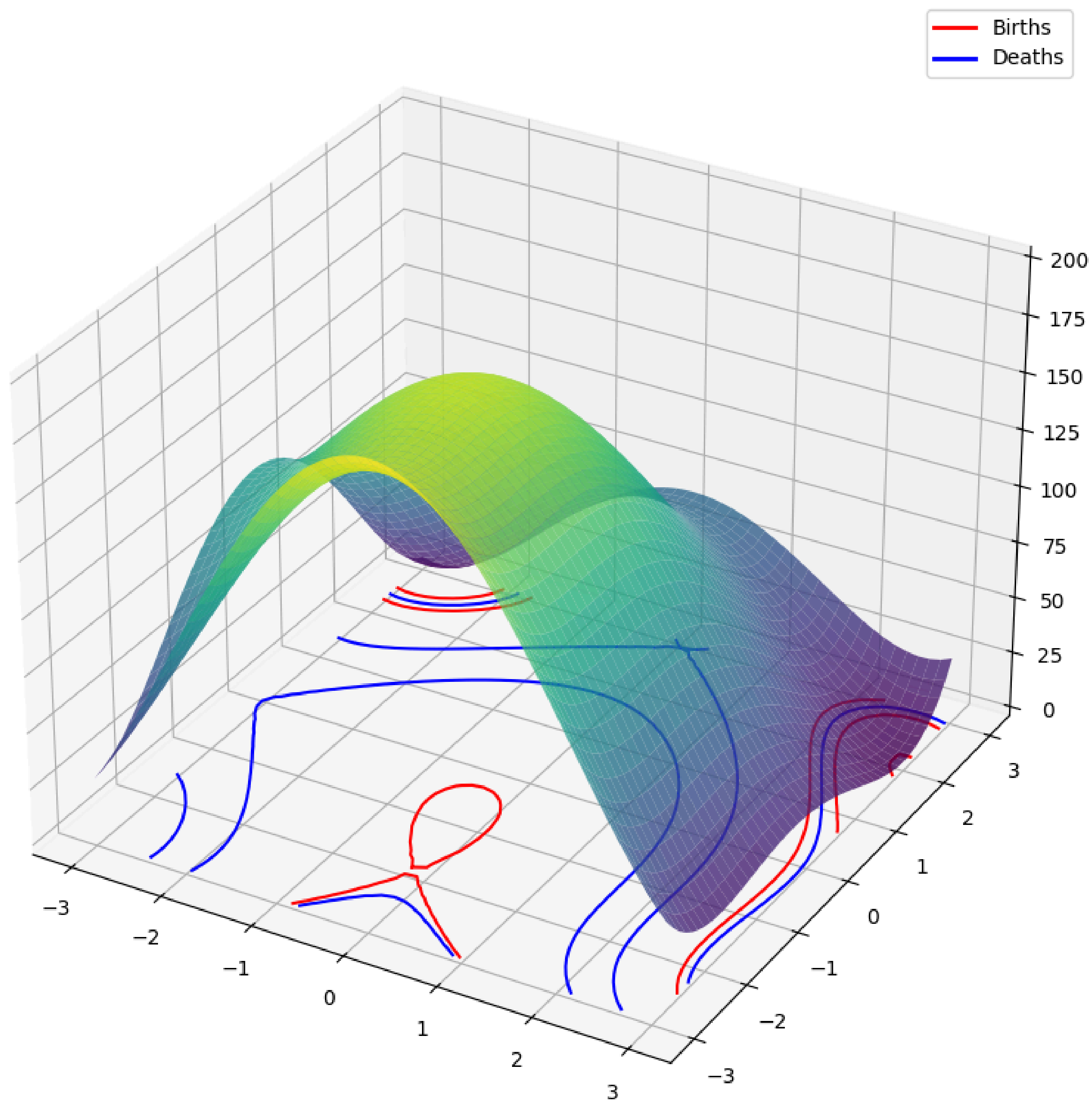



Crveni markeri predstavljaju rođenje nove klase, dok plavi predstavljaju umiranje neke klase (umiranje može da znači da se jedna klasa spojila sa nekom drugom, ali da je kasnije nastala pa se nastavlja život klase u koju se ona stapa jer je "starija"). Takođe imamo jednu klasu koja nikada ne "umire", to je marker koji stoji na liniji **+∞.** Slika ispod prikazuje površ i konture na njoj dobijene iz konturnog stabla koje smo pre napravili.

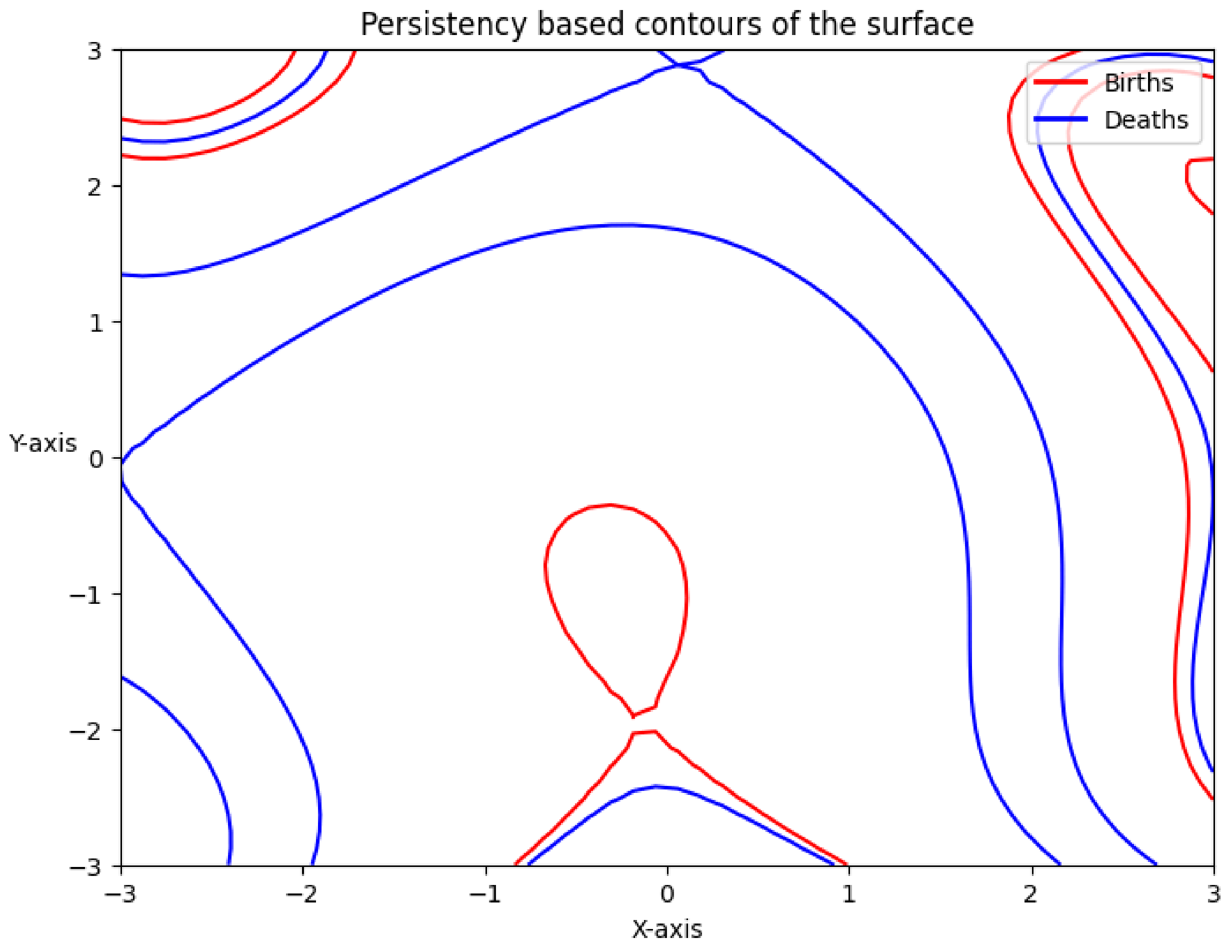



Konture koje ovde vidimo su sve konture koje su postojale prilikom pravljenja konturnog stabla, za razliku od konturnog stabla koje smo prikazali ranije u ovom radu koje je imalo samo nekoliko čvorova. Ove konture su sve one koje su učestvovale u spajanju da bi se na kraju dobilo finalno konturno stablo.

Da bismo mogli da ustanovimo veze između funkcije visine koja određuje našu površ i topoloških karakteristika iste, iskoristili smo perzistenciju kompleksnog stabla zajedno sa rađanjem i umiranjem klasa koje smo imali ranije. Na 2D mrežu smo projektovali konture sa površi koje predstavljaju visine određene klase na kojoj je ona nastala (rođena) ili nestala (spojena sa nekom drugom). Slika ispod to prikazuje.

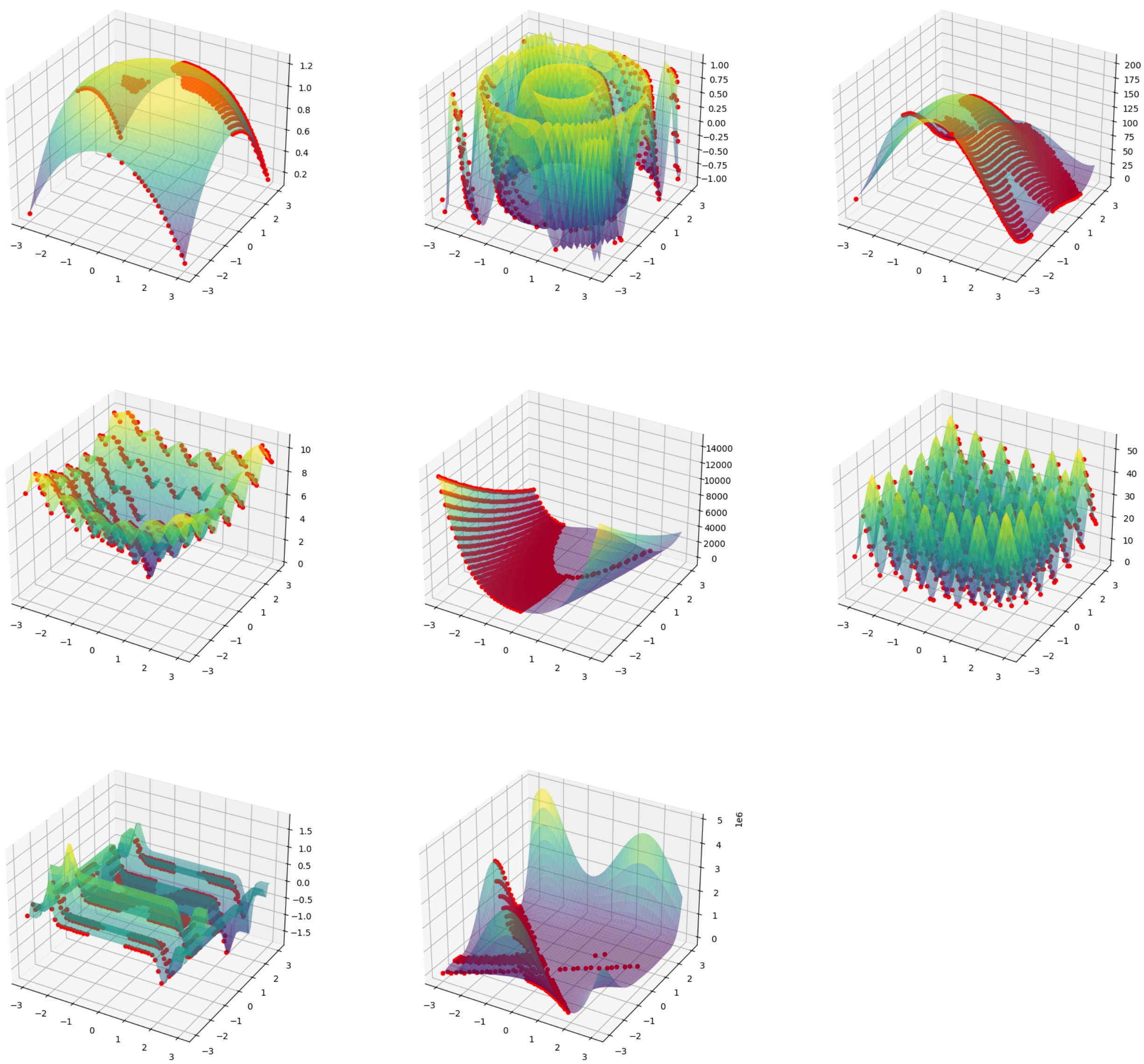



Naravno, treba uzeti u obzir da ova vizualizacija zavisi od domena koordinata 2D mreže nad kojom smo radili, jer funkcija površi koju smo izabrali bi možda imala drugačija topološka svojstva koja bi uticala na perzistenciju simpleksnog stabla koje bismo napravili. Na sledećoj slici možemo videti samo projekcije kontura bez površi iznad. Projekcija je sada u ravni.



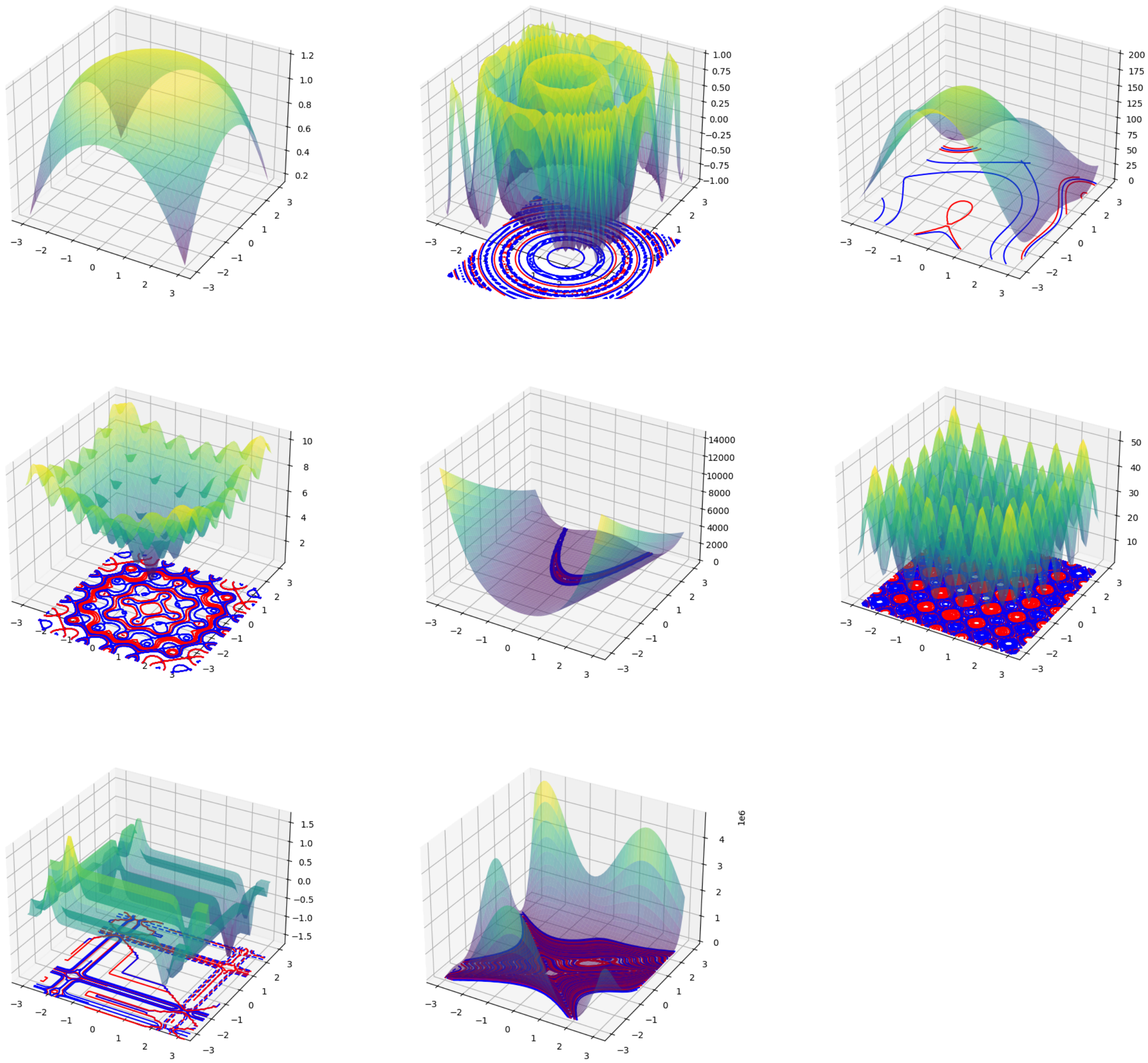

## Vizualizacije

Izabrali smo da detaljnije prikažemo korake u radu na *Himmelblau funkciji* zbog njenog "*prirodnog*" izgleda. Nema veliki broj lokalnih optimum, glatka je i nema naglih prelaza. Zapravo ova funkcija i izgleda kao površina koja se može naći negde u prirodi, npr. obala mora, jezera, rečnog korita itd. Na slikama ispod vidimo rezultate primena istih metoda koje smo koristili gore na ostalim površima koje smo naveli na početku ovog rada.

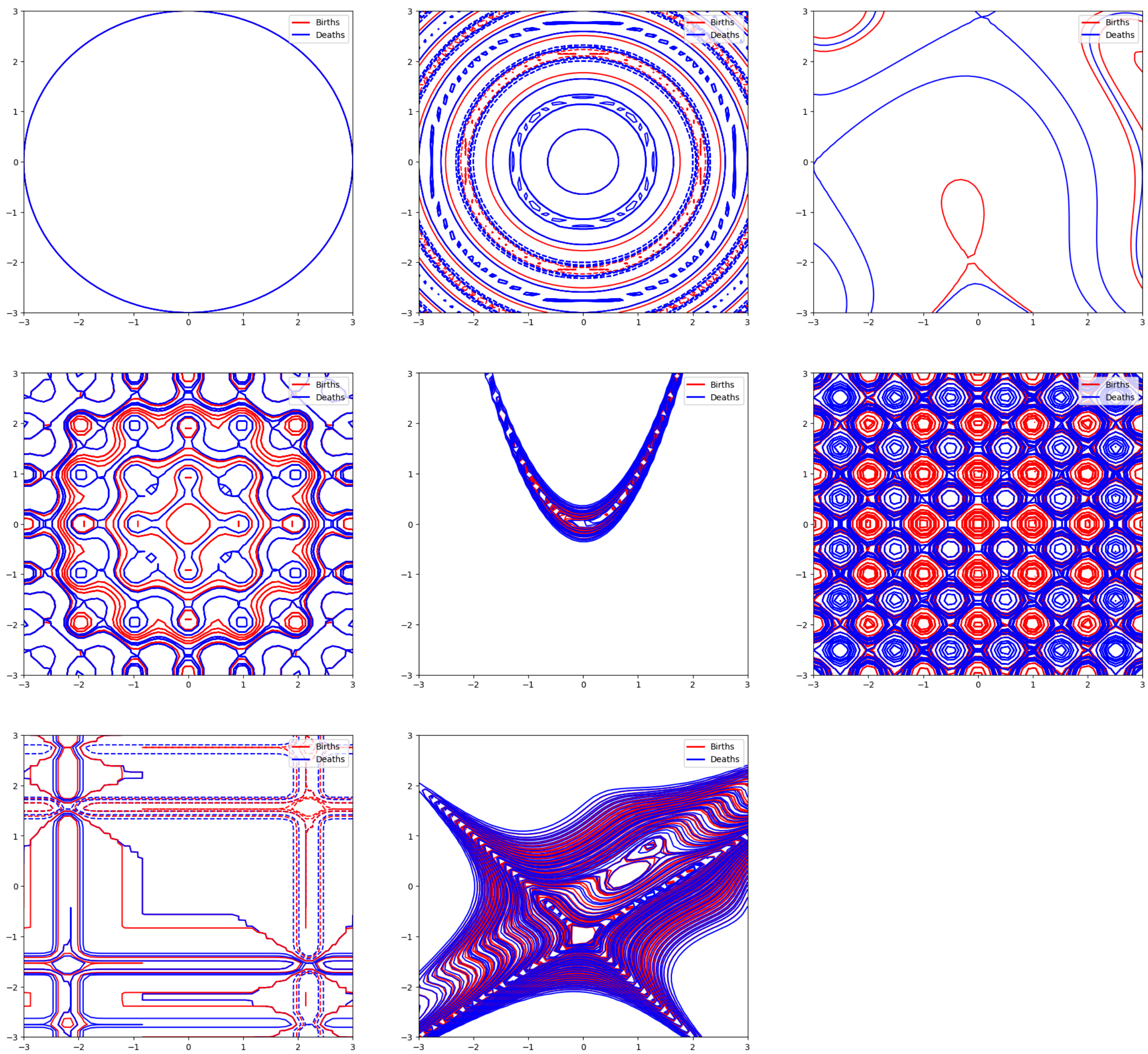


Slika iznad prikazuje površi sa markerima koje predstavljaju tačke sa njihovih konturnih stabala.

VIdimo da usled velikog broja lokalnih optimuma (kao na primer kod *Rastriginove funkcije*) konturna stabla su proređena i nemaju neke uređene konturne linije kao kod drugih “glatkijih” površi.



Slika iznad pokazuje površi i konture klasa projektovane na 2D ravan. Možemo primetiti da kod poovrši sa velikim brojem lokalnih optimuma, kontura ima mnogo i gusto su pakovane. Zbog čestih i naglih promena u funkciji visine (z koordinati) često dolazi do spajanja (umiranja) klasa i samim tim i do rađanja novih klasa. Ovo možda nije ralan primer iz okruženja ali je svakako dobra ilustracija mogućnosti topoloških metoda u segmentaciji 3D površi, kao i pristupi kojima se vode.




Slika iznad je izolovani prikaz ravni sa prethodne silke na kojoj su projektovane konture klasa.

# Zaključak

U ovom radu smo videli kako korišćenjem topoloških metoda, perzistentne homologije i konturnih stabala, možemo prići problemu segmentacije i izolovanja karakteristika 3D površi na drugačiji način nego što je to slučaj sa konvencionalnim pristupima (duboko učenje, klasifikacija...). Takođe smo videli i mogućnosti ove metodologije i kod površi koje imaju veliki broj skokova i padova (multimodalne funkcije), i koje imaju velika odstupanja visina na malim segmentima.

Korišćenje topoloških metoda i metoda perzistentne homologije je u porastu i daje rezultate u rešavanju mnogih problema između kojih je i predikcija i prevencija poplava. Vizualizacijom i analizom topoloških karakteristika terena može se utvrditi na kojim oblastima se mogu očekivati poplave usled porasta nivoa vode, kao i prevencijom istih. Metode koje smo prikazali ovde su nam omogućile da na nekom osnovnom nivou možemo da uvidimo benefite topoloških metoda, nasuprot nekim konvencionalnim metodama kao što su duboke neuronske mreže, klasifikatori na osnovu dubokog učenja (eng. *deep learning*) i drugi.