ตัวอย่างข้อสอบ 2301312 สมการเชิงอนุพันธ์ ปรับปรุงจากข้อสอบไล่ภาคปลาย ปีการศึกษา 2544

PART A

1. จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุด $x = 0$ ของสมการ $2x^2y'' + x(2x+1)y' - y = 0$ โดยวิธีของโฟรเบนิอุส (12 คะแนน)

Let $P(x) = (2 + \frac{1}{x})$ and $Q(x) = \frac{1}{x^2}$. Then, $x = 0$ is a regular singular point because $xP(x)$ and $x^2Q(x)$ are analytic functions at $x = 0$.

Suppose that $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad a_n \neq 0$

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + x(2x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + 2(n+r)a_n x^{n+r+1} + (n+r)a_n x^{n+r} - a_n x^{n+r}\right] = 0$$

The coefficient of the lowest degree term x^r is

$$(2r(r-1) + r - 1)a_n$$

Solve the indicial equation

$$\begin{aligned}
(2r(r-1) + r - 1)a_n &= 0 \\
2r^2 - r - 1 &= 0 \\
r &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} \\
&= \frac{1 \pm 3}{4} \\
&= -\frac{1}{2}, 1
\end{aligned}$$

Find the recursive formula (set powers of x to $n + r + 1$)

$$2(n+r+1)(n+r)a_{n+1} + 2(n+r)a_n + (n+r+1)a_{n+1} - a_{n+1} = 0$$

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= -\frac{2(n+r)a_n}{2(n+r+1)(n+r) + (n+r)} \\
&= -\frac{2a_n}{2(n+r+1)+1}
\end{aligned}$$

Case $r_1 = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -\frac{2a_n}{2n-1+2+1} \\ &= -\frac{a_n}{n+1} \\ a_n &= \frac{(-1)^n}{n!}a_0 \end{aligned}$$

Let $c_1 = a_0$

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n-1/2} \\ &= c_1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Case $r_2 = 1$

$$a_{n+1} = -\frac{2a_n}{2n+5}$$

Let $c_2 = a_0$

$$y_2 = c_2 \left(x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{7 \cdot 5}x^3 - \frac{8}{9 \cdot 7 \cdot 5}x^4 + \dots \right)$$

The general solution is

$$\boxed{y = c_1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} + c_2 \left(x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{7 \cdot 5}x^3 - \frac{8}{9 \cdot 7 \cdot 5}x^4 + \dots \right)}$$

2. จงหาค่าของ

2.1 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^4}\,\mathrm{d}x$ (ให้ $t = x^4$) (3 คะแนน)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{4} e^{-t} t^{-3/4}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\mathcal{L}\left\{t^{-3/4}\right\}(1) \\ &= \boxed{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \end{aligned}$$

2.2 $\displaystyle\int_{2\pi}^{\infty} e^{-4t}\sin 2t\cos 2t\,\mathrm{d}t$ (4 คะแนน)

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{1}{2}H(t-2\pi)e^{-4t}\sin 4t\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{H(t-2\pi)\sin 4t\right\}(4)\\ &= \frac{1}{4}e^{-2\pi\cdot 4}\mathcal{L}\left\{\sin(4t+2\pi)\right\}(4)\\ &= \boxed{\frac{e^{-8\pi}}{32}}\end{aligned}$$

3. จงเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ที่มี $P_4(x)$ เป็นผลเฉลย พร้อมทั้งหา $P_4(x)$ (3 คะแนน)

Legendre's differential equation of order 4 is

$$\boxed{(1-x^2)y''-2xy'+20y=0}$$

Use Rodrigues' Formula

$$\begin{aligned}P_4(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n\Big|_{n=4}\\ &= \frac{1}{2^4 4!}\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}\left(x^2-1\right)^4\\ &= \frac{1}{2^4 4!}\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}\left(x^8-4x^6+6x^4\right)\\ &= \frac{1}{2^4 4!}(8\cdot 7\cdot 6\cdot 5x^4-4\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3x^2+6\cdot 4!)\\ &= \boxed{\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)}\end{aligned}$$

4. จงหาผลเฉลยของสมการ $xy''+y'-\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{4}\right)y=0$ (8 คะแนน)

Multiply the whole equation by x

$$x^2y''+xy'-\left(1-\frac{x^2}{4}\right)y=0$$

This is a Bessel's differential equation where

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(1-2s)x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[a^2r^2x^{2r}+(s^2-r^2v^2)\right]y=0$$

has general solution in Bessel function form as

$$y(x) = c_1 x^s J_v(ax^r) + c_2 x^s Y_v(ax^r)$$

Use $s = 0, r = 1, a = \frac{1}{2}, v = 1$; The general solution is

$$\boxed{y = c_1 J_1\left(\frac{x}{2}\right) + c_2 Y_1\left(\frac{x}{2}\right)}$$

PART B

5. จงเติมเฉพาะคำตอบลงในช่องว่างที่กำหนดให้โดยไม่ต้องแสดงวิธีทำ (5 คะแนน)

5.1 $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\right\} = \boxed{\frac{1}{2s}}$

5.2 $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \boxed{\frac{2}{s^2+4}}$

5.3 $\mathcal{L}\{\cos 3t\} = \boxed{\frac{s}{s^2+9}}$

5.4 $\mathcal{L}\left\{e^{-4t}\right\} = \boxed{\frac{1}{s+4}}$

5.5 $\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = \boxed{\frac{2}{s^3}}$

5.6 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s}\right\} = \boxed{3}$

5.7 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} = \boxed{\cos 3t}$

5.8 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = \boxed{e^{5t}}$

5.9 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \boxed{\frac{t^2}{2}}$

5.10 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+5}\right\} = \boxed{\frac{\sin(\sqrt{5}t)}{\sqrt{5}}}$

6. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ (10 คะแนน)

6.1 $\int_0^\infty e^{(4-s)t}\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{1}{s-4}}$

6.2 $\int_0^\infty e^{-st}(t^2-2)\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{2}{s^3} - \frac{2}{s}}$

6.3 $\mathcal{L}\left\{4t^{3/2}\right\} = \boxed{\frac{3\sqrt{\pi}}{4s^{5/2}}}$

6.4 $\mathcal{L}\left\{e^t \cos 2t\right\} = \boxed{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}}$

6.5 $\mathcal{L}\{t \sin 3t\} = \boxed{\frac{6s}{(s^2+9)^2}}$

7. จงใช้ทฤษฎีบทสังวัตนาการหา $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}\right\}$ (5 คะแนน)

By Convolution Theorem, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t)$;

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+1)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\frac{s}{s^2+1}\right\} \\
&= \cos t * \cos t \\
&= \int_0^t \cos(u)\cos(u-t)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \cos(2u-t) + \cos(t)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2u-t)}{2} + u\cos t\right]_0^t \\
&= \boxed{\frac{1}{2}(\sin t + t\cos t)}
\end{aligned}$$

8. จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของสมการ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y + 2\displaystyle\int_0^t y(t-x)\,\mathrm{d}x = 2t; \quad y(0) = 0$

(7 คะแนน)

Laplace transform both sides; $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$

$$\begin{aligned}
sY(s) - y(0) + 2Y(s) + 2\mathcal{L}\{1 * y(t)\} &= \frac{2}{s^2} \\
(s+2)Y(s) + \frac{2}{s}Y(s) &= \frac{2}{s^2} \\
(s^2+2s+2)Y(s) &= \frac{2}{s} \\
Y(s) &= \frac{2}{s((s+1)^2+1)}
\end{aligned}$$

Use Convolution Theorem

$$\begin{aligned}
y(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} \\
&= 2\left[1 * (e^{-t}\sin t)\right] \\
&= 2\int_0^t e^{-u}\sin u\,\mathrm{d}u \\
&= \left[e^{-u}(-\cos u) + e^{-u}(-\sin u)\right]_0^t \\
&= \boxed{1 - e^{-t}(\sin t + \cos t)}
\end{aligned}$$

PART C

9. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ (18 คะแนน)

9.1 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^x \cos 2x \,\mathrm{d}x\right\} = \boxed{\frac{1}{s}\frac{s-1}{(s-1)^2+4}}$

9.2
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{e^t - e^{-2t}}{t}\right\} &= \int_s^\infty \mathcal{L}\left\{e^t - e^{-2t}\right\}(r)\,\mathrm{d}r \\ &= \int_s^\infty \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r+2}\,\mathrm{d}r \\ &= \lim_{a\to\infty}\left[\ln|r-1| - \ln|r+2|\right]_s^a \\ &= \boxed{\ln\frac{s-1}{s+2}}\end{aligned}$$

9.3 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-3} + \frac{s}{9s^2+1}\right\} = \boxed{2e^{3t} + \frac{\cos t}{9}}$

9.4 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s+1}\right\} = \boxed{H(t-3)e^{-(t-3)}}$

9.5 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\frac{s-1}{s}\right\} = \boxed{\frac{e^t-1}{t}}$

9.6
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2s+10}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2+9}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+9} - \frac{1}{(s+1)^2+9}\right\} \\ &= \boxed{e^{-t}\left(\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t\right)}\end{aligned}$$

10. จงหาผลเฉลยของสมการ $y'' + y = \begin{cases} t, & 0 < t < \pi \\ \pi, & t > \pi \end{cases}$; $y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$ (7 คะแนน)

Rewrite into a heaviside function

$$y'' + y = t - H(t-\pi)(t-\pi)$$

Laplace transform both sides; $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$

$$\begin{aligned}
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) &= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2} \\
(s^2+1)Y(s) - 2s - 3 &= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2} \\
Y(s) &= \frac{1}{s^2+1}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2} + 2s + 3\right) \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2}\right)\right\} + 2\cos t + 3\sin t
\end{aligned}$$

The first part (use Convolution Theorem)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2}\right\} &= \sin t * t \\
&= \int_0^t \sin u(t-u)\,\mathrm{d}u \\
&= [-t\cos u + u\cos u - \sin u]_0^t \\
&= -\sin t + t
\end{aligned}$$

The second part (use $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)H(t-a)$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2}\right\} &= H(t-\pi)(-\sin(t-\pi) + t - \pi) \\
&= H(t-\pi)(\sin t + t - \pi)
\end{aligned}$$

The final result

$$\begin{aligned}
y(t) &= -\sin t + t - H(t-\pi)(\sin t + t - \pi) + 2\cos t + 3\sin t \\
&= t + 2\cos t + 2\sin t - H(t-\pi)(\sin t + t - \pi)
\end{aligned}$$

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} t + 2\cos t + 2\sin t, & \text{if } 0 < t < \pi \\ \pi + 2\cos t + \sin t, & \text{if } t > \pi \end{cases}}$$

11. จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{cases} (D-1)x + y = 2\sin t \\ -x + (D+1)y = 4\cos t - \sin t \end{cases} \quad \text{เมื่อ } x(0) = 2, \quad y(0) = 5$$

(8 คะแนน)

Find determinant of differential operators

$$P(D) = \begin{vmatrix} D-1 & 1 \\ -1 & D+1 \end{vmatrix} = D^2$$

Find $x(t)$

$$\begin{aligned}
P(D)x &= \begin{vmatrix} 2\sin t & 1 \\ 4\cos t - \sin t & D+1 \end{vmatrix} \\
D^2 x &= (D+1)2\sin t - 4\cos t + \sin t \\
D^2 x &= (3\sin t - 2\cos t) \\
x &= c_1 + c_2 t + \frac{1}{D^2}(3\sin t - 2\cos t) \\
x &= c_1 + c_2 t - 3\sin t + 2\cos t
\end{aligned}$$

Find $y(t)$

$$\begin{aligned}
P(D)y &= \begin{vmatrix} D-1 & 2\sin t \\ -1 & 4\cos t - \sin t \end{vmatrix} \\
D^2 y &= (D-1)(4\cos t - \sin t) + 2\sin t \\
D^2 y &= -\sin t - 5\cos t \\
y &= c_3 + c_4 t + \frac{1}{D^2}(-\sin t - 5\cos t) \\
y &= c_3 + c_4 t + \sin t + 5\cos t
\end{aligned}$$

Substitute $x(t)$ and $y(t)$ into equation

$$\begin{aligned}
(D-1)x + y &= 2\sin t \\
(D-1)(c_1 + c_2 t - 3\sin t + 2\cos t) & \\
+ c_3 + c_4 t + \sin t + 5\cos t &= 2\sin t \\
c_2 - \cancel{3\cos t} - 2\sin t & \\
- c_1 - c_2 t + 3\sin t - \cancel{2\cos t} &= 2\sin t \\
+ c_3 + c_4 t + \sin t + \cancel{5\cos t} & \\
-c_2 + c_4 &= 0 \\
c_2 - c_1 + c_3 &= 0
\end{aligned}$$

Rewrite with 2 constants

$$x = c_1 + c_2 t - 3\sin t + 2\cos t$$
$$y = (c_1 - c_2) + c_2 t + \sin t + 5\cos t$$

Check with initial conditions

$$x(0) = 2 \implies c_1 + 2 = 2 \implies c_1 = 0$$
$$y(0) = 5 \implies -c_2 + 5 = 5 \implies c_2 = 0$$

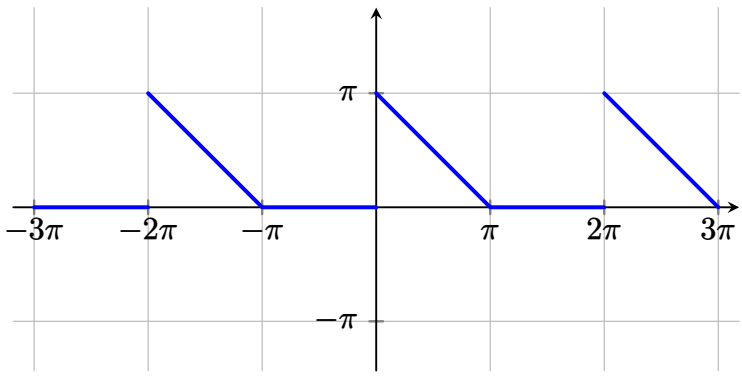
The final results are

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -3\sin t + 2\cos t \\ y &= \sin t + 5\cos t \end{aligned}}$$

PART D

12. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ และ $f(x + 2\pi) = f(x)$

12.1 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วง $(-3\pi, 3\pi)$



12.2 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi - x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Find a_n

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(n(\pi - x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\sin(n(\pi - x))\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin(n(\pi - x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\sin(n(\pi - x)) + \frac{1}{n^2}\cos(n(\pi - x))\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{2n^2}\right)
\end{aligned}$$

Find b_n

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(n(\pi - x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\cos(n(\pi - x))\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos(n(\pi - x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\cos(n(\pi - x)) + \frac{1}{n^2}\sin(n(\pi - x))\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Fourier series of $f(x)$ is

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{2n^2}\cos nx + \frac{\pi}{n}\sin nx\right]}$$

12.3 จงหาผลบวกของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ (10 คะแนน)

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi}{2}\left(f(0) - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0^-} f(x) + \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}(0+\pi) - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \boxed{\frac{\pi^2}{8}}
\end{aligned}
$$

13. เส้นลวดมีความยืดหยุ่นเส้นหนึ่งยาว π หน่วย ปลายทั้งสองถูกยึดติดแน่นที่จุด $x = 0$ และ $x = \pi$ เส้นลวดนี้ถูกทำให้เป็นเส้นโค้ง $u(x,0) = x(\pi - x)$ แล้วปล่อยให้เกิดการสั่นด้วยความเร็ว $u_t(x,0) = 3$ จงเขียนปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบของโจทย์นี้โดยไม่ต้องหาผลเฉลย (กำหนดให้ $c^2 = 1$) (3 คะแนน)

$$
\boxed{
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\
u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0 \\
u(x,0) = x(\pi - x), \quad u_t(x,0) = 3, \quad 0 < x < \pi
\end{gathered}
}
$$

14. จงแสดงวิธีหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบซึ่งถูกควบคุมด้วยสมการความร้อนใน 1 มิติ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบ $u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$
และเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L$ (12 คะแนน)

$$
\boxed{
\begin{gathered}
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 c^2 t}\sin\frac{n\pi}{L}x \\
A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x\,, \quad n = 1,2,3,\ldots
\end{gathered}
}
$$

15. จงหาผลเฉลยของปัญหาในข้อ 14 เมื่อกำหนดให้ $c^2 = 9, L = 4, f(x) = x + 12$ (5 คะแนน)

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{4}\int_0^4 (x+12)\sin\frac{n\pi}{4}x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{4}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{4}x + \frac{16}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{4}x - \frac{48}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{4}x\right]_0^4 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{16(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{48(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{48}{n\pi}\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(32(-1)^{n+1} + 24\right)
\end{aligned}$$

The solution

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{n\pi}{4})^2 9t}\sin\frac{n\pi}{4}x \\
&= \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left(32(-1)^{n+1}+24\right)e^{-\frac{9n^2\pi^2}{16}t}\sin\frac{n\pi}{4}x}
\end{aligned}$$

PART E

16. จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังรอบจุดสามัญ $x = 0$ ของสมการ $y'' - xy' - y = 0$
(เขียนผลเฉลยให้เห็นอย่างน้อยถึงพจน์ x^5) (10 คะแนน)

(From midterm q.13) The solution is

$$\boxed{y = c_1\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \cdots\right) + c_2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \cdots\right)}$$

17. ลวดสปริงเส้นหนึ่งถูกยึดปลายบนติดกับเพดาน เมื่อนำวัตถุหนัก 6 ปอนด์ มาผูกติดไว้ที่ปลายล่างของลวดปริงจะทำให้ลวดสปริงยืดออก 6 นิ้ว ถ้าดึงวัตถุนี้ลงมาต่ำกว่าตำแหน่งสมดุล 4 นิ้ว แล้วปล่อยด้วยการผลักวัตถุขึ้นด้วยความเร็ว $\frac{8}{3}$ ฟุต/วินาที
จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ พร้อมทั้งบอกค่าแอมพลิจูด และมุมทิ้งช่วง (10 คะแนน)

(From midterm q.3) The motion equation is

$$\boxed{x(t) = \frac{\sqrt{2}}{3}\sin\left(8t + \frac{3\pi}{4}\right)\ \text{ft}}$$

Amplitude is $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}\text{ ft}}$ and angle of departure is $\boxed{\frac{3\pi}{4}\text{ rad}}$.

18. สำหรับปัญหาการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ผูกติดกับปลายลวดสปริงปัญหาหนึ่ง ถ้าเราทราบว่าสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุคือ

$$x(t) = \frac{1}{3}\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$

18.1 จงหา แอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่ (1.5 คะแนน)

(From midterm q.4) Amplitude is $\boxed{\frac{1}{3}}$. Period is $\boxed{2}$. Frequency is $\boxed{\frac{1}{2}}$.

18.2 จงหาตำแหน่ง ความเร็ว ความเร่งของการเคลื่อนที่ เมื่อเวลา 1 วินาที หลังจากปล่อยให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่ พร้อมทั้งอธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่ของวัตถุ ณ ขณะนั้น (3.5 คะแนน)

$$\begin{aligned}
x(1) &= \frac{1}{3}\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{3\sqrt{2}}} \\
x'(1) &= \frac{\pi}{3}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \boxed{\frac{\pi}{3\sqrt{2}}} \\
x''(1) &= \boxed{-\frac{\pi^2}{3\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

The object is travelling in $+x$ direction and is getting accelerated into $-x$ direction.

19. จงหาประจุไฟฟ้า $q(t)$ บนตัวเก็บประจุในวงจรไฟฟ้าแบบอนุกรม RLC ที่เวลา $t = 0.01$ วินาที เมื่อ $L = 0.05$ เฮนรี, $R = 2$ โอห์ม, $C = 0.01$ ฟารัด, $E(t) = 0$ โวลต์, $q(0) = 5$ คูลอมบ์ และ $i(0) = 0$ แอมแปร์ และจงพิจารณาหาเวลาที่ประจุไฟฟ้าบนตัวเก็บประจุเป็นศูนย์ครั้งแรก (10 คะแนน)

$$\begin{aligned}
E_L + E_R + E_C &= E(t) \\
L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{1}{C}q &= E(t) \\
L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q &= E(t)
\end{aligned}$$

Substitute in the quantities

$$
\begin{aligned}
(0.05\,\mathrm{H})\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + (2\,\Omega)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{0.01\,\mathrm{F}}q &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + 40\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + 2000q &= 0 \\
((D+20)^2 + 40^2)q &= 0 \\
q &= e^{-20t}(c_1\cos 40t + c_2\sin 40t)\ \mathrm{C}
\end{aligned}
$$

Check $q(0) = 5\,\mathrm{C}$

$$
c_1 = 5
$$

Check $i(0) = 0\,\mathrm{A}$

$$
\begin{aligned}
i &= \begin{aligned} & e^{-20t}(-20c_1\cos 40t - 20c_2\sin 40t \\ & \qquad -40c_1\sin 40t + 40c_2\cos 40t)\ \mathrm{A} \end{aligned} \\
0 &= -100 + 40c_2 \\
c_2 &= \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

The charge function of time

$$
\begin{aligned}
q(t) &= e^{-20t}\left(5\cos 40t + \frac{5}{2}\sin 40t\right)\ \mathrm{C} \\
q(0.01) &= \boxed{e^{-5}\left(5\cos 0.4 + \frac{5}{2}\sin 0.4\right)\ \mathrm{C}}
\end{aligned}
$$

Find the time when charge is 0

$$
\begin{aligned}
0 &= \cos 40t + \frac{1}{2}\sin 40t \\
\tan 40t &= -2 \\
t &= \boxed{\frac{1}{40}(\pi - \arctan 2)\ \mathrm{s}}
\end{aligned}
$$