$\boxed{T4}$ $\xi \sim p(x) = p\{(-1,0) \cup (0,1)\} + p_1\{0\} + p_2\{2\}$

Нормируем $\int_{-\infty}^{+\infty} p\,dx = 1 \Rightarrow 2p + 2p_1 = 1 \Rightarrow p_1 = -p + 0{,}5$

Пусть $p = \theta$, тогда $0 < \theta < 1/2$, $\exists \bar{x}_n$

и $\xi \sim p(x, \theta) = \theta\{(-1,0) \cup (0,1)\} + (0{,}5-\theta)\{0\} + (0{,}5-\theta)\{2\}$

а) ОММ: возьмем α_1:

$$\alpha_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x,\theta)\,dx = \int_{-1}^{1} x p\,dx = \int_{-1}^{1} x\theta\,dx + 0 + 2(0{,}5-\theta) =$$

$$= 1 - 2\theta \qquad \alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 = \bar{x} \Rightarrow 1 - 2\theta = \bar{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\theta} = 0{,}5(1-\bar{x})}$$

б) Проверим несмещённость:

$$M[\tilde{\theta}] = 0{,}5\,M[1-\bar{x}] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\overbrace{M[\xi]}^{\alpha_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2}\theta =$$

$$= \theta \Rightarrow \tilde{\theta} \text{ несмещенн.}$$

Проверим состоятельн:

$$D[\tilde{\theta}] = \frac{1}{4} D[1-\bar{x}] = \frac{1}{4} D[\bar{x}] = \frac{\overbrace{D[\xi]}^{\mu_2}}{4n}$$

$$\alpha_2 = \int_{-1}^{1} x^2 p\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\theta\,dx + 0 + 4(0{,}5-\theta) = 2 - \frac{10}{3}\theta$$

$$\Rightarrow \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \theta\left(\frac{2}{3} - 4\theta\right) + 1$$

$$\Rightarrow D[\tilde{\theta}] = \frac{\theta}{6n} - \frac{\theta^2}{n} + \frac{1}{4n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \tilde{\theta} \text{ — состоят.}$$

c) Проверим эффективность.

Регулярная модель?

1) $p(x,\theta) = \theta\{(-1,0)\cup(0,1)\} + (0{,}5-\theta)\{0\} +$
$+(0{,}5-\theta)\{2\}$ — непр. дифф. по θ на $(0,\frac{1}{2})$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\theta} p(x,\theta)dx = \int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot dx - 1 - 1 = 0$

3) $I(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 \cdot p(x,\theta)dx =$
$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\theta^2}\cdot\theta dx + \frac{0{,}5-\theta}{(0{,}5-\theta)^2} + \frac{0{,}5-\theta}{(0{,}5-\theta)^2} = \frac{2}{\theta(1-2\theta)} > 0$

и непрер. на $(0, 1/2)$ —

$\Rightarrow$ модель регулярная $\Rightarrow$ и оценка регулярная (по дост. усл.)

так как оценка несмещённая,

Прав. Вычисл. Момент. регулярно

и $D[\tilde{\theta}] = \frac{\theta}{64} - \frac{\theta^2}{4} + \frac{1}{44}$ — огр. на $\forall$ компакте с $(0, 1/2)$

Тогда по нер-ву Крамера-Рао:

$\frac{\theta}{64} - \frac{\theta^2}{4} + \frac{1}{44} \geq \frac{\theta(1-2\theta)}{24}$ ($\neq \Rightarrow$ качество об эффект. сказать нельзя)

ОМП

а) функция правдоподобия: (Пусть m раз встретился 0 или 2)

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta)=\theta^{n-m}(0,5-\theta)^m$$

$$(\ln L)'_\theta = \left((n-m)\ln\theta + m\ln(0,5-\theta)\right)'_\theta =$$

$$=\frac{n-m}{\theta}-\frac{m}{0,5-\theta}=\frac{n-m}{\theta}-\frac{2m}{1-2\theta}=\frac{n-m-2n\theta}{\theta-2\theta^2}$$

$$\frac{n-m-2n\theta}{\theta-2\theta^2}=0 \Rightarrow 2n\theta=n-m \Rightarrow \underline{\tilde{\theta}=0,5-0,5p}$$

провер., что явл. max-?

$$(\ln L)''_{\theta\theta}=\frac{n-m}{\theta^2}+\frac{m}{(0,5-\theta)^2}\cdot(-1)^3=\frac{(1-2\theta)^2\cdot(n-m)-4m\theta^2}{\theta^2(1-2\theta)^2}=\frac{m(4\theta-1)+n(1-2\theta)^2}{-\theta^2(1-2\theta)^2}$$

$m(4\theta-1)>0$ на Θ

$n(1-2\theta)^2>0$

$-\theta^2<0 \quad (1-2\theta)^2>0$

$\Rightarrow (\ln L)''_{\theta\theta}<0 \Rightarrow$ это max

б) несмещенность:

$$M[\tilde{\theta}]=0,5-0,5\,M[p]=0,5-0,5p=\theta \Rightarrow \underline{\text{несмещ.}}$$

состоятельность

$$D[\tilde{\theta}]=\frac{1}{4}D[p]=\frac{1}{4}\left(\frac{p(1-p)}{n}\right)=\frac{\theta(1-2\theta)}{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$\Rightarrow$ $\underline{\text{состоятельн.}}$

c) Эффективность

$\hat{\theta}$ – регул. (по дост. усл.) => выпол. н-во Крамера-Рао:

$$D\{\hat{\theta}\} = \frac{\theta(1-2\theta)}{2n} \leq \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$$

(<=> эффективна)

d) Ответ: ОМП – не эффективна