אוניברסיטת תל אביב - בית הספר למדעי המחשב
מבוא מורחב למדעי המחשב, חורף 2025

<u>תרגיל בית מספר 5 - להגשה עד 21/01/2025 בשעה 23:59</u>

קראו בעיון את הנחיות העבודה וההגשה המופיעות באתר הקורס. חריגה מההנחיות תגרור ירידת ציון / פסילת התרגיל.

<u>הנחיות לצורת ההגשה</u>:

- תשובותיכם יוגשו בקובץ pdf ובקובץ py בהתאם להנחיות בכל שאלה.
- בסה״כ מגישים שני קבצים בלבד. עבור סטודנטית שמספר ת״ז שלה הוא 012345678 הקבצים שיש להגיש הם hw5_012345678.pdf ו- hw5_012345678.py.
- השתמשו בקובץ השלד skeleton5_2024a.py כבסיס לקובץ אותו אתם מגישים.
- לא לשכוח לשנות את שם הקובץ למספר ת״ז שלכם לפני ההגשה, עם סיומת py.

<u>הנחיות לפתרון</u>:

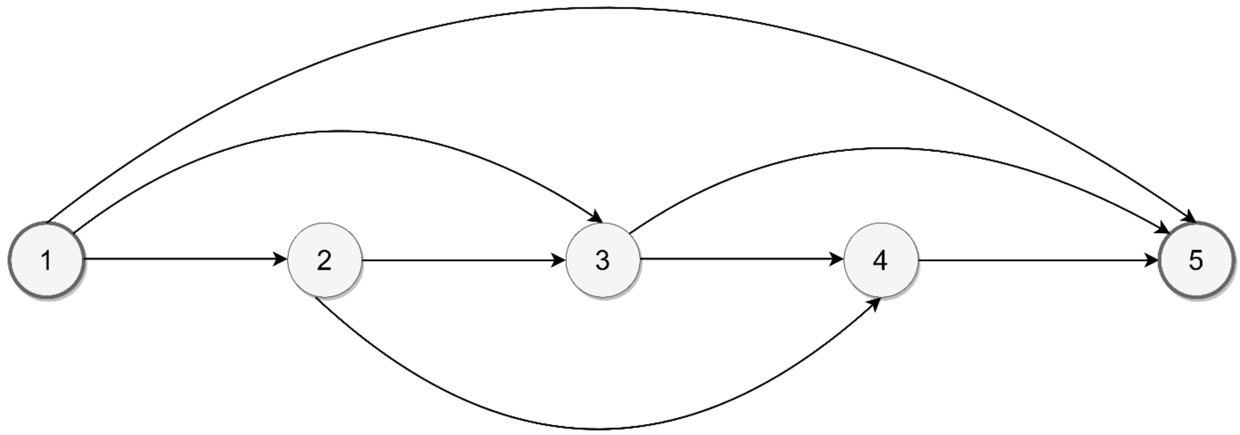
- הקפידו לענות על כל מה שנשאלתם.
- בכל שאלה, אלא אם מצוין אחרת באופן מפורש, ניתן להניח כי הקלט תקין.
- אין להשתמש בספריות חיצוניות פרט לספריות time ,math, random אלא אם נאמר במפורש אחרת.
- תשובות מילוליות והסברים צריכים להיות תמציתיים, קולעים וברורים.
  להנחיה זו מטרה כפולה:
  1. על מנת שנוכל לבדוק את התרגילים שלכם בזמן סביר.
  2. כדי להרגיל אתכם להבעת טיעונים באופן מתומצת ויעיל, ללא פרטים חסרים מצד אחד אך ללא עודף בלתי הכרחי מצד שני. זוהי פרקטיקה חשובה במדעי המחשב.
- כיוון שלמדנו בשבועות האחרונים כיצד לנתח את זמן הריצה של הקוד שלנו, החל מתרגיל זה ולאורך שארית הסמסטר (וכן במבחן) נדרוש שכל הפונקציות שאנו ממשים תהיינה יעילות ככל הניתן. לדוגמה, אם ניתן לממש פתרון לבעיה בסיבוכיות $O(logn)$, ואתם מימשתם פתרון בסיבוכיות $\Theta(n)$, תקבלו ניקוד חלקי על הפתרון.
- בשאלות שבהן ישנה דרישה לניתוח סיבוכיות זמן הריצה, הכוונה היא לסיבוכיות זמן הריצה של המקרה הגרוע ביותר (worst-case complexity). כמו כן, אלא אם כן צוין אחרת, ניתן להגיש פתרונות שרצים בזמן <u>יעיל יותר</u> מהדרישה בתרגיל. (לדוגמא, אם נדרש שסיבוכיות הזמן של הפתרון תהיה $O(n^2)$, ניתן להגיש קוד שסיבוכיות זמן הריצה שלו היא $O(n)$).

אוניברסיטת תל אביב - בית הספר למדעי המחשב
מבוא מורחב למדעי המחשב, חורף 2025

שאלה 1

הדרכה: באתר המודל של הקורס, תחת "פתרונות והדרכות" מצורפים 4 סרטוני הדרכה שיעזרו לכם בהבנת התרגיל. מומלץ ביותר לצפות בהם לפני שאתם מתחילים לפתור את התרגיל.

נגדיר מבנה נתונים חדש: **רשימה מקושרת לוגריתמית**. המבנה החדש מתבסס על הרשימה המקושרת שראינו בהרצאה ובתרגול עם שינוי מרכזי – במקום שכל צומת יחזיק מצביע לצומת הבא אחריו, כל צומת מחזיק מצביעים לצמתים שנמצאים 2^i צעדים אחריו, לכל $0 \leq i \leq \log n$ (אם ישנם כאלו), כאשר n הוא מספר האיברים ברשימה.
להלן דיאגרמה לרשימה מקושרת לוגריתמית בת 5 איברים (כרגיל, איברי הרשימה מופיעים משמאל לימין). שימו לב למשל שלצומת מספר 1 יש 3 מצביעים קדימה (לצמתים 2, 3 ו-5), לצומת 3 יש 2 מצביעים קדימה בלבד (לצמתים 4 ו-5) ואילו לצומת 5 אין מצביעים קדימה בכלל (כיוון שהוא האחרון ברשימה).
הבהרה: אין חשיבות למיקום החצים בתרשים ביחס לצמתים (כלומר, האם הם מעל, לצד או מתחת לצמתים ברשימה) ולמספר המופיע בתוך הצומת. אלמנטים אלו הם לנוחות הקריאה של הדוגמא בלבד.



כדי לממש את המבנה החדש בפייתון, נייצג את רשימת המצביעים של כל צומת על ידי שדה בשם next_list מטיפוס רשימה של פייתון (list). האיבר באינדקס i ברשימת המצביעים next_list יהיה המצביע לצומת שנמצא 2^i צמתים אחרי הצומת הנוכחי.
בצומת האחרון ברשימה המקושרת שדה ה-next_list יהיה רשימה ריקה (זאת בשונה מרשימה מקושרת כפי שראינו בכיתה, בה שדה ה-next של הצומת האחרון הינו None).
להלן המחלקה של צומת ברשימה מקושרת לוגריתמית:

```
class LLLNode:
    def __init__(self, val):
        self.next_list = []
        self.val = val
```

רשימה מקושרת לוגריתמית תיוצג כרגיל על ידי שדה head שיצביע לראש הרשימה ושדה len בו נשמור את אורך הרשימה. להלן המחלקה של רשימה מקושרת לוגריתמית עם מתודת אתחול וחישוב אורך:

```
class LogarithmicLinkedList:
    def __init__(self):
        self.head = None
        self.size = 0

    def __len__(self):
        return self.size
```

כדוגמא קונקרטית, אם נסמן ב-p1, p2, p3, p4, p5 את האיברים מטיפוס LLLNode שמייצגים את צמתי הרשימה שבציור (משמאל לימין) ונקרא לרשימה בה הם נמצאים L אזי למשל:
`p1.next_list = [p2, p3, p5]`, `p5.next_list = []` וכן `L.head = p1`.

<u>הנחיה</u>: את סעיפים א׳ וב׳ יש לממש בסיבוכיות זמן $O(\log n)$ כאשר n הוא מספר האיברים ברשימה.

<u>סעיף א׳</u>
ממשו את המתודה add של המחלקה LogarithmicLinkedList. המתודה תקבל כקלט רשימה מקושרת לוגריתמית self ומשתנה נוסף val. המתודה תוסיף צומת חדש **<u>לתחילת הרשימה</u>** self שערכו הוא val כך שיעמוד בהגדרת המחלקה מהעמוד הקודם. שימו לב כי בקובץ השלד כבר נתון חלק מהמימוש.

<u>סעיף ב׳</u>
ממשו את המתודה __getitem__. המתודה תקבל כקלט רשימה מקושרת לוגריתמית self באורך n ומשתנה נוסף $0 \leq i < n$ ותחזיר את הערך בצומת ה-i ברשימה self.

<u>סעיף ג׳ (רשות)</u>
בסעיף זה נניח כי ערכי הרשימה (כלומר, ערכי ה-val של כל צומת ברשימה) ממוינים בסדר עולה. לפניכם מימוש למתודה __contains__. המתודה מקבלת כקלט רשימה מקושרת לוגריתמית self ומשתנה val ומחזירה True אם״ם יש צומת ברשימה שערכו הוא val.

```
def __contains__(self, val):
    p = self.head
    k = 1
    while k != 0:
        if p.val == val:
            return True
        k = 0
        m = len(p.next_list)
        while k < m and p.next_list[k].val <= val:
            k += 1
        if k > 0:
            p = p.next_list[k-1]
    return False
```

בסרטון שהועלה למודל בו אנחנו מסבירים על רשימות לוגריתמיות, ראינו שזמן הריצה של מתודה זו הוא $\Theta(\log^2 n)$, ודיברנו על שיפור פשוט שיביא לזמן ריצה של $O(\log n \cdot \log\log n)$. שפרו את המימוש הנתון למתודה __contains__ כך שזמן הריצה שלה יהיה $O(\log n)$.

אוניברסיטת תל אביב - בית הספר למדעי המחשב
מבוא מורחב למדעי המחשב, חורף 2025

שאלה 2 – גנרטורים

הגדרה: גנרטור הוא **בעל השהייה סופית** (finite delay) אם כל קריאה ל-next עליו מסתיימת תוך זמן סופי (לא משנה כמה זמן). כל קריאת next תמיד מחזירה איבר או שגיאת StopIteration בפרק זמן סופי. שימו לב שגם גנרטור שמייצר סדרה אינסופית יכול להיות בעל השהייה סופית.

הגדרה: גנרטור g **מייצר את הקבוצה** S (סופית או אינסופית) אם:

1. g הוא בעל השהייה סופית.
2. $x \in S$ אמ"ם g מייצר את x לאחר מספר סופי של קריאות next.
3. g לא מייצר חזרות (כלומר, כל איבר ש-g מייצר הוא ייחודי).

בהגדרה זו אין חשיבות לסדר החזרת איברי S.

הגדרה: גנרטור g **מייצר את הסדרה** $\{a_n\}$ (סופית או אינסופית) אם g בעל השהייה סופית, וכן לאחר i קריאות next יוחזר הערך a_i (או StopIteration לאחר החזרת כל איברי הסדרה). שימו לב שכאן יש חשיבות לסדר החזרת איברי הסדרה.

לכל אחד מהגנרטורים הבאים, אם ניתן לבנות אותו כך שתהיה לו השהייה סופית, השלימו את פונקציית הגנרטור המתאימה בקובץ השלד. אחרת, הביאו דוגמה לקלט הסבירו בקצרה מדוע הוא אינו בעל השהייה סופית.

א. ()gen1 המייצר את הקבוצה $\mathbb{Z}^2$, כלומר כל זוגות המספרים **השלמים**.
תזכורת: בתרגול 11 תוצג שאלה דומה עבור הקבוצה $\mathbb{N}^2$. ניתן להיעזר בקוד שראיתם.

ב. gen2(g) המקבל גנרטור g שמייצר סדרת מספרים כלשהי $\{a_n\}$ (g סופי או אינסופי, בעל השהייה סופית), מייצר את סדרת הסכומים החלקיים של איברי g. כלומר אם g מייצר את הסדרה $a_1, a_2, a_3, \ldots$ אז הגנרטור מייצר את הסדרה $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \ldots$.

ג. gen3(g) המקבל גנרטור g שמייצר סדרת מספרים כלשהי $\{a_n\}$ (g סופי או אינסופי, בעל השהייה סופית), ומייצר את קבוצת איברי g שגדולים מ-0.

ד. gen4(g) המקבל גנרטור g שמייצר סדרת מספרים כלשהי $\{a_n\}$ (g סופי או אינסופי, בעל השהייה סופית), ובקריאת next ה-i מחזיר True אמ"ם איברי הסדרה $a_1, \ldots, a_i$ מהווים סדרה מונוטונית עולה או יורדת במובן החלש. כלומר, אמ"ם אחד משני הבאים מתקיים:

1) $a_1 \le \cdots \le a_i$
2) $a_1 \ge \cdots \ge a_i$

ה. gen5(g1, g2) המקבל שני גנרטורים (סופיים או אינסופיים, בעלי השהייה סופית) ומייצר את החיתוך שלהם, כלומר את כל קבוצת האיברים שמיוצרים גם על ידי g1 וגם על ידי g2.

ו. gen6(g1, g2) המקבל שני גנרטורים שמייצרים את הסדרות $\{a_n\}$ ו-$\{b_n\}$ (g1,g2 או שניהם סופיים ובאותו הגודל, או שניהם אינסופיים, בעלי השהייה סופית), ומייצר את סדרת האיברים המקיימים $a_i \neq b_i$.

ז. ()gen7: גנרטור המייצר את סדרת הגנרטורים כך שהגנרטור ה i מחזיר את קבוצת כל המספרים שמתחלקים ב i. פורמלית נגדיר כי הגנרטור מייצר את הסדרה $\{G_i\}_{i=1,2,\ldots}$ כך ש G_i הוא גנרטור המייצר את הקבוצה הבאה $\{x_j \in \mathbb{N} \mid x_j mod\ i = 0\}$

אוניברסיטת תל אביב - בית הספר למדעי המחשב
מבוא מורחב למדעי המחשב, חורף 2025

<u>שאלה 3</u>

הערה: בשאלה זו נעסוק בעצי חיפוש בינאריים. לאורך השאלה נתעלם משדה ה-val של צמתים בעץ.
בניתוח סיבוכיות נחשיב פעולות על מספרים כלוקחות זמן קבוע.

שימו לב שבמחלקה BinarySearchTree מומשה המתודה __repr__ לנוחיותכם כך שתדפיס את העץ בצורה ברורה.

<u>סעיף א'</u>

בהינתן n1, n2 (n1<=n2), שני מפתחות של צמתים בעץ חיפוש בינארי, נגדיר את **<u>האב הקדמון המשותף הנמוך ביותר</u>** שלהם להיות הצומת העמוק ביותר כך שגם n1 וגם n2 הם חלק מתת העץ שתחתיו. למשל, עבור העץ t שבדוגמת ההרצה של סעיף ג', הצומת המחבר הראשון של 1 ו-3 הוא 2, והצומת המחבר הראשון של 4 ו-6 הוא 4.

ממשו את הפונקציה lowest_common_ancestor(t, n1, n2) המקבלת עץ מהמחלקה BinarySearchTree ושני מפתחות של צמתים בעץ החיפוש הבינארי ומחזירה את האב הקדמון המשותף הנמוך ביותר.
<u>הנחיות</u>: על המימוש להיות רקורסיבי. ניתן להשתמש בשדות הפנימיים של TreeNode ו-BinarySearchTree.

נתחו בקובץ ה-pdf את זמן הריצה של המתודה כפונקציה של n, גודל העץ.

<u>הגדרה</u>: עץ בינארי הוא **<u>מושלם</u>** אם לכל צומת שאינו עלה יש בדיוק 2 ילדים וכל עלי העץ בעומק זהה.

<u>סעיף ב' (רשות)</u>

שימו לב: בסעיף זה אנו מתעלמים מתוכן העץ – מפתח ו/או שדה ומתייחסים למבנה העץ בלבד.

הוכיחו את שתי הטענות הבאות בקובץ ה-pdf:

- הוכיחו כי לכל $n \geq 1$ קיים עץ בינארי **<u>מושלם</u>** בן n צמתים אם ורק אם קיים שלם $d \geq 1$ כך ש-$n = 2^d - 1$.
- הוכיחו כי במקרה זה העץ המושלם הוא יחיד.

<u>סעיף ג'</u>

ממשו את הפונקציה build_balanced המקבלת כקלט שלם חיובי $d \geq 1$. הפונקציה תחזיר כפלט **<u>עץ חיפוש בינארי מושלם</u>** בעומק d (כלומר, אובייקט מהמחלקה BinarySearchTree), שמפתחותיו הם המספרים: $1,2,3,\dots,2^d - 1$.

<u>הנחיות</u>: על המימוש להיות רקורסיבי. יש להשתמש בשדות הפנימיים של TreeNode ו-BinarySearchTree.

דוגמת הרצה:

```
>>> t = build_balanced(3)
>>> print(t)
                4
        _______/ \_______
       2                 6
    __/ \__           __/ \__
   1       3         5       7
  / \     / \       / \     / \
 #   #   #   #     #   #   #   #

>>> t.size
7
```

נתחו בקובץ ה-pdf את זמן הריצה של הפונקציה build_balanced כפונקציה של n, גודל העץ. הסבירו את תשובתכם. בתשובה ציינו גם מהי צורתו של עץ הרקורסיה.

<u>סעיף ד׳</u>

ממשו את הפונקציה subtree_sum המקבלת כקלט עץ חיפוש בינארי מושלם שמפתחותיו הם המספרים $1,2,3,\ldots,2^d-1$ (עבור עומק עץ d) ומפתח בעץ. הפונקציה תחזיר כפלט את סכום המפתחות בתת העץ שתחת הצומת עם המפתח שקיבלנו בקלט (כולל אותו צומת).

למשל, עבור הדוגמה מסעיף ג׳:

```
>>> print(subtree_sum(t, 6))
>>> 18
```

נתחו בקובץ ה-pdf את זמן הריצה של הפונקציה subtree_sum כפונקציה של n, גודל העץ. הסבירו את תשובתכם.

על אף שקיימים מימושים יעלים יותר, פתרונות בסיבוכיות לינארית בגודל בעץ יתקבלו בשאלה זו, אומנם אנו מעודדים אותכם לחשוב על פתרונות יעילים יותר (גם אם תגישו אותם).

<u>שאלה 4</u>

נתונה רשימה של n מחרוזות $[s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}]$, לאו דווקא שונות זו מזו. בנוסף נתון $k > 0$, וידוע שכל המחרוזות באורך לפחות k (ניתן להניח זאת בכל הפתרונות שלכם ואין צורך לבדוק או לטפל במקרים אחרים).

אנו מעוניינים למצוא את כל הזוגות הסדורים של אינדקסים שונים (i, j), כך שקיימת חפיפה באורך k בדיוק בין רישא (התחלה) של s_i לסיפא (סיומת) של s_j. כלומר $s_j[-k:] == s_i[:k]$.

לדוגמה, אם האוסף מכיל את המחרוזות הבאות:

```
s0 = "a"*10
s1 = "b"*4 + "a"*6
s2 = "c"*5 + "b"*4 + "a"
```

אז עבור $k=5$ יש חפיפה באורך k בין הרישא של s0 לבין הסיפא של s1, ויש חפיפה באורך k בין הרישא של s1 לבין הסיפא של s2. שימו לב שאנו לא מתעניינים בחפיפות אפשריות של מחרוזות עם עצמן, כמו למשל החפיפה באורך 5 בין רישא של s0 לסיפא של עצמה. לכן, הפלט במקרה זה יהיה שני הזוגות $(0,1)$ ו-$(1,2)$. אבל ייתכן שיש שתי מחרוזות זהות, ואז כן נתעניין בחפיפה כזו. למשל עבור s0=s1="aaa" ועבור $k=1$ הפלט אמור להיות $(0,1)$ ו-$(1,0)$.

<u>סעיף א'</u>

נציע תחילה את השיטה הבאה למציאת כל החפיפות הנ"ל: לכל מחרוזת נבדוק את הרישא באורך k שלה אל מול כל הסיפות באורך k של כל המחרוזות האחרות. ממשו את הפתרון הזה בקובץ השלד, בפונקציה **`prefix_suffix_overlap(lst,k)`**, אשר מקבלת רשימה (מסוג list של פייתון) של מחרוזות, וערך מספרי k, ומחזירה רשימה עם כל זוגות האינדקסים של מחרוזות שיש ביניהן חפיפה כנ"ל. אין חשיבות לסדר הזוגות ברשימה, אך יש כמובן חשיבות לסדר הפנימי של האינדקסים בכל זוג.

דוגמאות הרצה:

```
>>> s0 = "a"*10
>>> s1 = "b"*4 + "a"*6
>>> s2 = "c"*5 + "b"*4 + "a"
>>> prefix_suffix_overlap([s0,s1,s2], 5)
[(0, 1), (1, 2)] #could also be [(1, 2), (0, 1)]
```

<u>סעיף ב'</u>

ציינו מהי סיבוכיות הזמן של הפתרון הזה במקרה הגרוע, כתלות ב-n וב-k במונחים של $O(\ldots)$. הניחו כי השוואה בין שתי תת מחרוזות באורך k דורשת $O(k)$ פעולות במקרה הגרוע. ציינו גם מתי מתקבל המקרה הגרוע, בהנחה שהשוואת מחרוזות עוברת תו-תו בשתי המחרוזות במקביל משמאל לימין, ומפסיקה ברגע שהתגלו תווים שונים.

<u>סעיף ג'</u>

כעת נייעל את המימוש ונשפר את סיבוכיות הזמן (בממוצע), ע"י שימוש במנגנון של טבלאות hash. לשם כך נשתמש במחלקה חדשה בשם Dict, שחלק מהמימוש שלה מופיע בקובץ השלד. מחלקה זו מזכירה מאוד את המחלקה Hashtable שראיתם בהרצאה, אבל ישנם שני הבדלים:

1) בקוד מההרצאה האיברים בטבלה הכילו רק מפתחות (keys), בדומה ל-set של פייתון, ואילו אנחנו צריכים לשמור גם מפתחות וגם ערכים נלווים (values), בדומה לטיפוס dict של פייתון. המפתחות במקרה שלנו יהיו רישות באורך k של המחרוזות הנתונות, ואילו הערך שנלווה לכל רישא כזו הוא האינדקס של המחרוזת ממנה הגיעה הרישא (מספר בין 0 ל-$n-1$). חישוב ה-hash לצורך הכנסה וחיפוש במילון מתבצע על המפתח בלבד.
2) מכיוון שיכולות להיות רישות זהות למחרוזות הנתונות, נרצה לאפשר חזרות של מפתחות ב-Dict (ראו בדוגמה בהמשך).

השלימו בקובץ השלד את המימוש של המתודה **`find(self, key)`** של המחלקה Dict, המתודה מחזירה רשימה (list של פייתון) עם **כל** ה-values שמתאימים למפתח key הנתון (לא חשוב באיזה סדר). אם אין כאלו תוחזר רשימה ריקה.

דוגמאות הרצה:

```
>>> d = Dict(3)
>>> d.insert("a", 56)
>>> d.insert("a", 34)
>>> d #calls __repr__
0 []
1 []
2 [['a', 56], ['a', 34]]

>>> d.find("a")
[56, 34] #order does not matter
>>> d.find("b")
[]
```

השלימו את מימוש הפונקציה **`prefix_suffix_overlap_hash1(lst, k)`**, שהגדרתה זהה לזו של `prefix_suffix_overlap(lst, k)`, אלא שהיא תשתמש במחלקה Dict מהסעיף הקודם. כאמור, כל הרישות יוכנסו למילון תחילה, ואז נעבור על כל הסיפות ונבדוק לכל אחת אם היא נמצאת במילון.

<u>סעיף ד'</u>

לצורך סעיף זה בלבד, הניחו כי אין שתי מחרוזות עם אותו סיפא, אותה רישא, או רישא של מחרוזת כלשהי ששווה לסיפא של מחרוזת כלשהי. בפרט, התנאי האחרון מבטיח שהפלט של `prefix_suffix_overlap` יהיה רשימה ריקה (אין התאמות). ציינו מהי סיבוכיות הזמן של הפתרון מסעיף ד' **בממוצע** (על פני הקלטים שמקיימים את התנאי של סעיף זה), כתלות ב-n וב-k במונחים של $O(\dots)$. הניחו כי השוואה בין שתי תת מחרוזות באורך k דורשת $O(k)$ פעולות במקרה הגרוע, וכך גם חישוב hash על מחרוזת באורך k נמקו את תשובתכם בקצרה.

<u>סעיף ה'</u>

בסעיף זה נחשוב נגדיר ההתאמה בין רישא לסיפא באורך k עד כדי תו אחד (כלומר צריכה להיות התאמה של לפחות $k-1$ תווים בין הרישא לסיפא. השלימו את הפונקציה:

`almost_prefix_suffix_overlap_hash1(lst, k)` סיבוכיות זמן הריצה הנדרשת $O(n \cdot k^2)$ בממוצע למקרה בו אין אף התאמה.

רמז: בסעיף זה ניתן להניח כי התו '*' אינו מופיע באף מחרוזת

<u>שאלה 5</u>

השאלה הבאה עוסקת ב-Object Oriented Programming (OOP) בשאלה זו נתעמק במחלקות Rational אשר נלמדו בכיתה ומייצגות מספרים <u>רציונליים</u>. בכל הסעיפים נניח לשם פשטות שכל המספרים הם חיוביים. כמו כן,

אוניברסיטת תל אביב - בית הספר למדעי המחשב
מבוא מורחב למדעי המחשב, חורף 2025

לאורך כל השאלה אין להשתמש באובייקטים מטיפוס float.
תזכורת: מספר n הוא רציונלי אם קיימים p, q שלמים כך ש-$n = \frac{p}{q}$.
הערה: לאורך כל התרגיל ניתן להניח כי q בהכרח שונה מ 0.
סעיף א'
הוכיחו שכל מספר רציונלי n ניתן להציג בתור $n = \frac{p}{q}$ כך ש-p, q שלמים וזרים (כלומר, $\gcd(p, q) = 1$, כאשר gcd מסמן את המחלק המשותף המקסימלי).
(הערה: ההצגה הזו נקראת ההצגה המצומצמת של n כשבר, והיא יחידה. כלומר, למעשה יש p, q יחידים המקיימים את הטענה. אין צורך להוכיח את היחידות)
סעיף ב'

במהלך השיעורים, עסקנו במחלקה Rational המיועדת לייצוג מספרים רציונליים. כזכור, גם אם כל מימוש של המחלקה הזו נבדל בדרך שבה הוא מאפיין מספר רציונלי (בשדות), שני המימושים מאפשרים את אותה הפונקציונליות. כך שלמשתמש החיצוני, המימוש הפנימי אינו קריטי להפעלת המחלקה.

ממשו את הפונקציות המובנות הבאות אצל כל אחת המחלקות Rational אשר מצורפות בשלד. שימו לב כי self ו-other הם אובייקטים מאותו הטיפוס (כלומר ניתן להניח כי לכל מתודה ישלחו אובייקטים מהמחלקה המתאימה)

- **`__mul__(self, other)`** – מתודה מובנית שתומכת באופרטור *
  מחזירה אובייקט מהמחלקה RationalNumber המייצג את תוצאת המכפלה בין self ו-other.
- **`__add__(self, other)`** – מתודה מובנית שתומכת באופרטור +
  מחזירה אובייקט מהמחלקה RationalNumber המייצג את תוצאת החיבור של self ו-other.
- **`divides(self, other)`** – מתודה המחזירה True אם תוצאת החילוק של המספר הרציונלי שמייצג other במספר הרציונלי שמייצג self היא מספר שלם, ו-False אחרת.

סעיף ג

בכיתה, התמקדנו במחלקה Point המייצגת נקודה במרחב דו-ממדי עם שני שדות x, y אשר מייצגים את הקואורדינטות של הנקודה. עד כה עבדנו עם קואורדינטות מטיפוסים int, float אך עתה נרחיב את המימוש גם לטיפוס Rational.

נבקש להגדיר סדר ליקסיקוגרפי בין שתי נקודות $A = (x_1, y_1)$ ו $B = (x_2, y_2)$– כדלהלן:

נקודה A תחשב קטנה מנקודה B אם $x_1 < x_2$, או אם $x_1 == x_2$ וגם $y_1 < y_2$.

אתם מתבקשים לממש את המתודה __lt__(self, other) במחלקה Point אשר תחזיר True אם הנקודה הנוכחית קטנה מהנקודה other לפי הגדרת הסדר הליקסיקוגרפי.

הנחיות:

על מנת לתמוך בפעולה זו, עליכם להיות מסוגלים להשוות גם אובייקטים מטיפוס Rational שיש לכם בשלד המצורף למטלה. אתם צריכים להבטיח שהמחלקה Point תוכל לעבוד עם שני המימושים של Rational שהוזכרו. על כן, תצטרכו לממש גם את המתודה__ls__ במחלקות המתאימות על מנת לתמוך בפעולת ההשוואה.

סוף