מבוא מורחב למדעי המחשב (0368-1105) | תרגיל בית 5

שם: רון גולדמן | ת"ז: 328274329

שאלה 2

ג. נגדיר פונקצית גנרטור באופן הבא:

```python
def gen():
    i = 0
    while True:
        yield i
        i -= 1
```

כעת אם נגדיר:

```python
g = gen()
```

ונניח כי קיים gen3(g) כך שיוחזרו כל איברי g שגדולים מ-0, נקבל השהייה אינסופית כי הוא יצטרך לעבור על כל האיברים עד האיבר הראשון שגדול מ-0, שהרי לא קיים.

ה. כדי לייצר את החיתוך של שני גנרטורים g1,g2 יש לייצר כל איבר מ-g1 ולבדוק האם מיוצר על ידי g2. הבדיקה הנ"ל לא בעלת השהיה סופית במקרה הבא:

```python
def gen1():
    i = 0
    while True:
        yield i
        i -= 1


def gen2():
        i = 0
        while True:
                yield i
                i += 1

g1, g2 = gen1(), gen2()
```

כי הרי אין איברים בחיתוך למעט 0.

שאלה 3

א. ננתח את הסיבוכיות של הפונקציה הפנימית.

במקרה הגרוע נקבל עץ ככה שהאב הקדמון המשותף a של n_1, n_2 מקיים a.left, a.right == n1, n2 כאשר n_1, n_2 עלים בעומק מירבי d. בכל קריאה לפונקציה מתבצעת בדיקה האם n_1 או n_2 הם המפתח של השורש, במקרה זה הדבר יתקיים רק שנגיע לעלים. אחרת אם הם בתת העץ הימני נקרא לפונקציה עליו, ובאותו אופן עבור תת העץ השמאלי. בכל קריאה כזו מפחיתים את עומק העץ ב-1 ולכן נקבל:

$$T\left(d\right)=O\left(1\right)+T\left(d-1\right)$$

זה יחס שמבטא התנהגות של $O\left(d\right)$ ולכן $T\left(d\right)=O\left(d\right)$. בעץ חיפוש בינארי מאוזן מתקיים כי גודל העץ הוא $n=2^d-1$ ולכן משום שזה המקרה הגרוע נקבל כי $T\left(n\right)=O\left(\log n\right)$.

ב. הוכחה:

- יהי $1\leq n\in\mathbb{N}$. נניח כי קיים עץ בינארי מושלם בן n צמתים. אם עומק העץ הוא $d\in\mathbb{N}$ אזי גודל העץ הוא כגודל 2 תתי עצים בעומק $d-1$ לפי הגדרת עץ מושלם. מכאן נקבל נוסחא:

$$S\left(d\right)=1+2S\left(d-1\right)$$

עבור עץ בעומק 1 ברור כי יש צומת יחיד ולכן נקבל את היחס:

$$\begin{cases}S\left(d\right)=1+2S\left(d-1\right) & 2\leq d\in\mathbb{N}\\ S\left(1\right)=1 & d=1\end{cases}$$

אם כך מתקיים:

$$S\left(d\right)=1+2+4+\ldots+2^d=\sum_{k=0}^{d}2^k=\frac{2^d-1}{2-1}=2^d-1$$

אך $S\left(d\right)=n$ ולכן קיים $1\leq d\in\mathbb{N}$ כך ש-$n=2^d-1$. בכיוון השני, קיים עץ בינארי מושלם כזה כי ניתן לבנות אותו באותו אופן כמו בכיוון השני של ההוכחה.

- נניח כי קיים עץ נוסף כזה, אנו בנינו את העץ לפי ההגדרה של עץ מושלם ולכן הוא יהיה בעל אותו מבנה. ולכן הוא יחיד אם מתעלמים מתוכן העץ.

ג. גם בסעיף זה ננתח את הסיבוכיות של הפונקציה הפנימית בלבד. מבנה התכנית מייצר עץ רקורסיה שהוא העץ המושלם שמייצרים מבחינת המבנה. בכל צומת מתבצעת $O\left(1\right)$ עבודה, לכן משום שגודל העץ הוא $n=2^d-1$ אזי:

$$T\left(n\right)=O\left(n\right)$$

ד. מהבנייה של העץ מתקיים כי אם עומק תת העץ המתאים הוא d כל תת עץ עם שורש k של עץ מושלם הוא עץ מושלם עד כדי הוספה של $m=k-2^{d-1}$ לכל המפתחות בעץ. אז הצמתים בתת העץ הם הקבוצה:

$$\left\{i\in\mathbb{N}\middle|k-2^{d-1}\leq i\leq 2^d+k-2^{d-1}-1\right\}$$

זה סכום סדרה חשבונית, ולכן הסכום S מקיים:

$$S=\sum_{i=k-2^{d-1}}^{2^d+k-2^{d-1}-1}=\left(2^d-1\right)\left(k-2^{d-1}\right)+\sum_{i=0}^{2^d-1}i=k\cdot 2^d-k+2^{d-1}-2^{2d-1}+\frac{\left(2^d-1\right)2^d}{2}$$
$$=k\cdot 2^d-k+2^{d-1}-2^{2d-1}+2^{2d-1}-2^{d-1}=\left(2^d-1\right)\cdot k$$

מהבנייה של העץ מתקיים כי $d=\lceil\log k\rceil$ ולכן:

$$S=\left(2^{\lceil\log k\rceil}-1\right)\cdot k$$

אם כך תחת הנחה שפעולות חשבוניות הן $O\left(1\right)$ נקבל כי $T\left(n\right)=O\left(1\right)$.

שאלה 4

ב. המקרה הגרוע מתקבל כאשר אין שום חפיפות. במשך n איטרציות נבצע n איטרציות שבהן נבדוק האם הרישא של המחרוזת ה-i היא הסיפא של המחרוזת ה-j. ייצור הרישא והסיפא לוקח $O\left(k\right)$ וכך גם זמן ההשוואה ולכן הסיבוכיות הכוללת סה"כ היא:

$$T\left(n,k\right)=O\left(n^2\cdot k\right)$$

ד. הסיבוכיות של insert היא $O\left(\text{len}\left(\text{key}\right)\right)$ כי הפעולה היחידה שם שאינה קבועה היא hash, והסיבוכיות של find היא $O\left(k\right)$ בממוצע (זו טבלת גיבוב ולכן מספר האיברים בתא הוא $O\left(1\right)$ בממוצע). במקרה הגרוע, בניית המילון היא $O\left(n\right)$, וההכנסה של הרישות למילון היא $O\left(n\cdot k\right)$. לאחר מכן עוברים על n המחרוזות ולכל מחרוזות עוברים על התא שלה בטבלה, היצירה של התא הוא $O\left(k\right)$ ומספר האיברים בתא הוא $O\left(1\right)$ ולכן סה"כ נקבל סיבוכיות ממוצעת:

$$T\left(n,k\right)=O\left(n\cdot k\right)$$

שאלה 5

א. יהי $n\in\mathbb{Q}$. מהגדרת המספרים הרציונליים קיימים $p^{'},q^{'}\in\mathbb{Z}$ כך ש$q^{'}\neq 0$ ו-$n=\frac{p^{'}}{q^{'}}$. אם $\gcd\left(p^{'},q^{'}\right)=1$ אז נגדיר $p=p^{'},q=q^{'}$ וסיימנו. אחרת, יהי $m=\gcd\left(p^{'},q^{'}\right)$, נגדיר p,q באופן הבא:

$$p=\frac{p^{'}}{m},q=\frac{q^{'}}{m}$$

כעת m לא מחלק אותם, והוא בפרט היה מכפלה של כל המחלקים הקטנים יותר שלהם, לכן $\gcd\left(p,q\right)=1$ וסיימנו.