מתמטיקה בדידה 1 (0368-1118)

רון גולדמן

תוכן העניינים

מבוא ללוגיקה

מושגי יסוד בלוגיקה

הגדרה. יהי φ, נאמר כי φ הוא **פסוק** אם $\varphi\in\{\text{False},\text{True}\}$.

הגדרה. נאמר כי פונקציה f היא **קשר לוגי** אם קיים $m,n\in\mathbb{N}$ כך שֶׁ-$f:\{\text{False},\text{True}\}^{n}\to\{\text{False},\text{True}\}^{m}$.

הגדרה. הקשר האונארי $\neg:\{\text{False},\text{True}\}\to\{\text{False},\text{True}\}$ שמקיים את טבלת האמת:

x	$\neg x$
False	True
True	False

נקרא **שלילה**.

הגדרה. הקשרים הבינארים $\vee,\wedge,\to,:\{\text{False},\text{True}\}^{2}\to\{\text{False},\text{True}\}$ שמקיימים את טבלת האמת:

x	y	$x\vee y$	$x\wedge y$	$x\to y$	$x\leftrightarrow y$
False	False	False	False	True	True
False	True	True	False	True	False
True	False	True	False	False	False
True	True	True	True	True	True

נקראים **או**, **וגם**, **גרירה** וְ-**אם ורק אם** בהתאמה.

הגדרה. יהיו x,y פסוקים. נאמר שֶׁ-x **שקול לוגית** לְ-y אם יש להם את אותה טבלת אמת. נסמן $x=y$.

טענה. יהיו x,y,z פסוקים.אז:

1. $x\wedge y=\neg\left(\neg x\vee\neg y\right)$.
2. $x\to y=\neg x\vee y$.
3. $x\leftrightarrow y=\left(x\wedge y\right)\vee\left(\neg x\wedge\neg y\right)$.
4. $\left(x\wedge y\right)\wedge z=x\wedge\left(y\wedge z\right)$.
5. $x\to y=\neg y\to\neg x$.

הגדרה. הכמתים **לכל** וְ-**קיים** מסומנים ב-$\forall,\exists$ בהתאמה. הם מקיימים כי לכל $\varphi\left(x\right)$ תבנית פסוק $\forall x.\varphi\left(x\right)$ שקול לוגית לכך שֶׁ-$\varphi\left(x\right)$ מתקיימת תמיד, וְ-$\exists x.\varphi\left(x\right)$ שקול לוגית לכך שעבור x כלשהו מתקיים $\varphi\left(x\right)$.

הגדרה. יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $\varphi:\{\text{False},\text{True}\}^{n}\to\{\text{False},\text{True}\}$ קשר לוגי.

1. אם לכל $x_1,\dots,x_n$ פסוקים מתקיים $\varphi\left(x_1,\dots,x_n\right)$, נאמר שְ-$\varphi$ **טאוטולוגיה**.

2. אם לכל $x_1,\dots,x_n$ פסוקים מתקיים $\neg\left(\varphi\left(x_1,\dots,x_n\right)\right)$, נאמר שְ-$\varphi$ **סתירה**.

משפט (עיקרון האינדוקציה). תהי $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת טענות. אם φ_0 וגם לכל $i\in\mathbb{N}$, $\varphi_i\to\varphi_{i+1}$ אזי φ_n לכל $n\in\mathbb{N}$.

משפט (עיקרון האינדוקציה השלמה). תהי $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת טענות. אם φ_0 וגם לכל $i\in\mathbb{N}$, $(\forall i\geq k\in\mathbb{N}.\varphi_k)\to\varphi_{i+1}$ אזי φ_n לכל $n\in\mathbb{N}$.

תורת הקבוצות

תורת הקבוצות הנאיבית

הגדרה (נאיבית ולא פורמלית). קבוצה היא אוסף של עצמים ללא חזרות וללא חשיבות לסדר.

דוגמה. $A=\{1,2,3,4\}$ היא קבוצה.

סימון. אם עצם x נמצא בקבוצה A נסמן $x\in A$.

הגדרה (עיקרון האקסטנציונליות). תהינה A,B קבוצות. נאמר כי הקבוצות A וְ-B **שוות** אם $\forall x.\left(x\in A\leftrightarrow x\in B\right)$, ונסמן $A=B$.

הגדרה. תהינה A,B קבוצות. נאמר שְ-A **תת-קבוצה** של**מוכלת** בְּ- B אם $\forall x.\left(x\in A\to x\in B\right)$, ונסמן $A\subseteq B$.
נאמר כי A **מוכלת ממש** בְּ-B אם בנוסף $A\neq B$, ונסמן $A\subset B$.

טענה (**טרנזיטיביות ההכלה**). תהינה A,B,C קבוצות. אם $A\subseteq B$ וגם $B\subseteq C$ אז $A\subseteq C$.

הגדרה. הקבוצה $\emptyset$ שמקיימת $\forall x.x\notin\emptyset$ נקראת **הקבוצה הריקה**.

טענה. לכל קבוצה A מתקיים $\emptyset\subseteq A$.

הגדרה (קבוצות מיוחדות). בקורס זה נניח את קיומן של מספר קבוצות:

1. **המספרים הטבעיים:** $\mathbb{N}\triangleq\{0,1,2,\dots\}$
2. **הטבעיים החיוביים:** $\mathbb{N}^+\triangleq\{1,2,3,\dots\}$
3. **המספרים השלמים:** $\mathbb{Z}\triangleq\{0,1,-1,2,-2,\dots\}$
4. **המספרים הרציונליים:** $x\in\mathbb{Q}$ אם ורק אם קיימים $n\in\mathbb{Z}$ ו-$m\in\mathbb{N}^+$ כך שְ-$x=\frac{n}{m}$.
5. **המספרים הממשיים:** $\mathbb{R}$
6. **המספרים המרוכבים:** $z\in\mathbb{C}$ אם ורק אם קיימים $x,y\in\mathbb{R}$ כך שְ-$z=x+iy$ כאשר $i^2=-1$.

פעולות על קבוצות

הגדרה. תהינה A,B,Ω קבוצות כך שֶׁ-$A\subseteq\Omega$. אזי

1. **החיתוך** של A וְ-B מסומן בְּ-$A\cap B$ כך שמתקיים:

$$\forall x.x\in A\cap B\leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)$$

2. **האיחוד** של A וְ-B מסומן בְּ-$A\cup B$ כך שמתקיים:

$$\forall x.x\in A\cup B\leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)$$

נאמר כי A וְ-B **זרות** אם $A\cap B=\emptyset$.

3. **ההפרש** $A\setminus B$ מקיים:

$$\forall x.x\in A\setminus B\leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)$$

4. **ההפרש הסימטרי** של A וְ-B מסומן ב-$A\Delta B$ מוגדר להיות:

$$A\Delta B\triangleq(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

5. **המשלים** של A ביחס ל-Ω היא הקבוצה $A_\Omega^c\triangleq\Omega\setminus A$.
כאשר Ω מובן מההקשר נסמן $A^c=\overline{A}\coloneqq A_\Omega^c$.

טענה (**תכונות של הפעולות הבסיסיות**). תהינה A,B,C,Ω קבוצות כך ש-$A,B\subseteq\Omega$. מתקיים

1.

$$A\cap\emptyset=\emptyset\quad A\cup\emptyset=A$$
$$A\cap A=A\quad A\cup A=A$$

2.

$$A\setminus B\subseteq A$$
$$(A\setminus B)\cap B=\emptyset$$

3.

$$A\cap B\subseteq A\quad B\subseteq A\cup B$$

אם $A\subseteq B$ אזי

$$A\cap B=A\quad A\cup B=B$$

4. $A\cup B\subseteq C$ אם ורק אם $A\subseteq C$ וגם $B\subseteq C$.
אם $A\cap B\subseteq C$ אזי $A\subseteq C$ וגם $B\subseteq C$.

5. **קומוטטיביות (חילופיות)**

$$A\cup B=B\cup A$$
$$A\cap B=B\cap A$$
$$A\Delta B=B\Delta A$$

6. **אסוציאטיביות (קיבוציות)**

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$
$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

7. **דיסטריבוטיביות (פילוג)**

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

8. **כללי דה-מורגן (De-Morgan)** כאשר $A^c=A^c_\Omega$ וְ-$B^c=B^c_\Omega$, אזי

$$A\setminus B=A\cap B^c$$
$$B\setminus A=B\cap A^c$$
$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$$
$$(A\cap B)^c A^c\cup B^c$$
$$(A^c)^c=A$$

9.

$$A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

פרדוקס ראסל

הגדרה (עיקרון הקומפרהנסיה). תהי $\varphi(x)$ תכונה, הביטוי

$$A=\{x\,|\varphi(x)\}$$

היא קבוצה כך שמתקיים

$$\forall x.x\in A\leftrightarrow\varphi(x)$$

בעיה (פרדוקס ראסל). ניתן להגדיר תכונה $X \notin X = \varphi(X)$.
אז לפי עיקרון הקומפרהנסיה $R = \{X \mid X \notin X\}$ זו קבוצה.
$R \in R \vee R \notin R$ זה סתירה ולכן R אינה קבוצה.

תורת הקבוצות האקסיומטית

אקסיומות ZF (Zermelo-Fraenkel)

אקסיומה (אקסיומת האקסטנציונליות). תהינה X, Y קבוצות.

$$\forall z. (z \in X \leftrightarrow z \in Y) \Rightarrow (X = Y)$$

אקסיומה (אקסיומת האיחוד). תהינה X, Y קבוצות.
אז האיחוד $X \cup Y$ הוא קבוצה.

אקסיומה (אקסיומת הקבוצה הריקה). קיימת קבוצה $\emptyset$ שלא מכילה אף איבר.

אקסיומה (אקסיומת הזיווג). תהינה X, Y קבוצות.
אז $\{X, Y\}$ היא קבוצה.

אקסיומה (אקסיומת הקומפרהנסיה המוגבלת). תהינה X קבוצה ו-$P(x)$ תכונה.
אז $\{x \in X \mid P(x)\}$ היא קבוצה.

אקסיומה (אקסיומת ההחלפה). תהי f פונקציה על קבוצה X.
אז $\{f(x) \mid x \in X\}$ היא קבוצה.

אקסיומה (אקסיומת האינסוף). תהי f פונקציה כך שמתקיים $f(x) = x \cup \{x\}$.
קיימת קבוצה X כך שֶ-$\emptyset \in X$ וגם אם $Y \in X$ אז $f(Y) \in X$.

אקסיומה (אקסיומת קבוצת החזקה). תהי X קבוצה.
אז $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$ היא קבוצה שנקראת **קבוצת החזקה של X (Power set of X)**.

טענה. תהינא A, B קבוצות.

1. $A \subseteq B \leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
2. $A \subseteq B \vee B \subseteq A$ אם ורק אם $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$.

אקסיומה (אקסיומת הרגולריות). תהי X קבוצה לא ריקה.
קיים $Y \in X$, כך שלכל $Z \in X$ מתקיים $Z \notin Y$.

הגדרה (כלל β). תהי קבוצה Ω, ותהי $P(x)$ תכונה.
אם $A = \{x \in \Omega \mid P(x)\}$, אז $P(y/x)$ אם ורק אם $y \in A$.

פעולות מוכללות על קבוצות

תהי F קבוצה. מאקסיומות ZF, כל איברי F קבוצות בעצמן ולכן הפעולות הבאות מוגדרות היטב.

הגדרה. האיחוד המוכלל של איברי F מוגדר להיות:

$$\bigcup F \triangleq \{x \mid \exists A \in F. x \in A\}$$

סימון. תהי I קבוצה, אם לכל $i \in I$ A_i קבוצה אזי

$$\bigcup_{i \in I} A_i \triangleq \{x \mid \exists i \in I. x \in A_i\}$$

בפרט עבור $I = \mathbb{N}$ נסמן:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \triangleq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

באותו אופן מכלילים את הנוטציה עבור $I = \mathbb{Z}, \mathbb{N}^+, \ldots$.

הגדרה. החיתוך המוכלל של איברי F מוגדר להיות:

$$\bigcap F \triangleq \{x \mid \forall A \in F. x \in A\}$$

סימון. תהי I קבוצה, אם לכל $i \in I$ A_i קבוצה אזי

$$\bigcap_{i \in I} A_i \triangleq \{x \mid \forall i \in I. x \in A_i\}$$

בפרט עבור $I = \mathbb{N}$ נסמן:

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \triangleq \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$$

באותו אופן מכלילים את הנוטציה עבור $I = \mathbb{Z}, \mathbb{N}^+, \ldots$.

טענה. $\bigcup F$ וגם $\bigcap F$ קבוצות.

טענה. תהי I $i \in I$ קבוצה כך שלכל $i \in I$, A_i קבוצה, ותהי B קבוצה. אזי

$$B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$$

$$B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$$

אם בנוסף, קיימת קבוצה Ω כך שלכל $i \in I$, $A_i \subseteq \Omega$ אזי

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$$
$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

הזוג הסדור והמכפלה הקרטזית

הגדרה. תהינה x, y קבוצות.
נגדיר את **הזוג הסדור** להיות $\langle x, y \rangle \triangleq \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

טענה (**תכונת הזוג הסדור**). תהינה a, b, c, d קבוצות. אזי

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff a = c \wedge b = d$$

הגדרה. תהינה A, B קבוצות.
המכפלה הקרטזית $A \times B$ מוגדרת להיות

$$A \times B \triangleq \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

טענה. לכל A, B קבוצות, $A \times B$ קבוצה.

טענה. תהי A קבוצה. אזי

$$\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$$

טענה. תהינה A, B קבוצות. אזי

$$(A \times B = B \times A) \iff (A = B \vee A = \emptyset \vee B = \emptyset)$$

הגדרה. תהינה x, y קבוצות. ה**היטל** של $z = \langle x, y \rangle$ על **הקואורדינטה** הראשונה והשנייה מסומן ב-$\pi_1(z), \pi_2(z)$ ומקיים:

$$\pi_1(z) \triangleq x$$
$$\pi_2(z) \triangleq y$$

כלומר, $z = \langle \pi_1(z), \pi_2(z) \rangle$.

סימון. יהי $n \in \mathbb{N}^+$. נגדיר

$$[n] = \left\{ i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \le i \le n \right\}$$

הגדרה. תהינה $a_1, a_2, \ldots, a_n$ קבוצות. נסמן

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \triangleq \langle a_1, \langle a_2, \langle \ldots, \langle a_{n-1}, a_n \rangle \rangle \rangle \rangle$$

אם $b = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ אז לכל $i \in [n]$ נגדיר:

$$\pi_i(b) = a_i$$

טענה. יהי $2 \leq n \in \mathbb{N}$. לכל $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ מתקיים

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \iff \forall i \in [n] \,. a_i = b_i$$

הגדרה. תהינה $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות. נגדיר:

$$\begin{aligned} A_1 \times \ldots \times A_n &\triangleq A_1 \times (A_2 \times \ldots \times A_n) \\ &\triangleq A_1 \times (A_2 \times \ldots (A_{n-1} \times A_n)) \end{aligned}$$

כלומר

$$A_1 \times \ldots \times A_n \triangleq \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \,|\forall i \in [n] \,. a_i \in A_i\}$$

אם קיימת קבוצה A כך שלכל $i \in [n]$, $A_i = A$. נסמן

$$A^n \triangleq A_1 \times \ldots \times A_n$$

יחסים

הגדרה ראשונית

הגדרה. תהינה A, B קבוצות. **יחס** בינארי R על A, B מ-A הוא קבוצה של זוגות סדורים $R \subseteq A \times B$.
נאמר כי R יחס מְ-A לְ-B, אם $A = B$ נאמר שְ-R יחס מעל A.
אם עבור $x \in A, y \in B$ מתקיים $\langle x, y \rangle \in R$, נסמן xRy.

הגדרה. תהי A קבוצה. **יחס הזהות** על A מסומן I_A ומוגדר על ידי:

$$I_A \triangleq \{\langle a, a \rangle \,|a \in A\}$$

הגדרה. יהי $2 \leq n \in \mathbb{N}$. יחס n **מקומי** על קבוצות $A_1, \ldots, A_n$ הוא תת קבוצה $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$.

טענה. תהינה A, B קבוצות. **קבוצת כל היחסים מְ-**A **לְ-**B היא הקבוצה $\mathcal{P}(A \times B)$.

הגדרה. תהינה A, B קבוצות, ויהי $S \subseteq A \times B$ יחס מ-A ל-B.
היחס ההפוך לְ-S הוא היחס:

$$S^{-1} \triangleq \{\langle b, a \rangle \in B \times A \,|\, \langle a, b \rangle \in S\}$$

הגדרה. תהינה A, B, C קבוצות, ויהיו $S \subseteq A \times B, R \subseteq B \times C$ יחסים מ-A ל-B ומ-B ל-C בהתאמה.
ההרכבה $R \circ S$ (R מורכב על S) היא יחס מ-A ל-C שמוגדר כך:

$$R \circ S \triangleq \{\langle a, c \rangle \in A \times C \,|\exists b \in B. \, \langle a, b \rangle \in S \wedge \langle b, c \rangle \in R\}$$

טענה. יהיו R וְ-S יחסים מעל קבוצה A. אזי

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$

טענה. יהי R יחס מעל קבוצה A.
אזי $R \circ I_A = I_A \circ R = R$.

הגדרה. תהי A קבוצה, ויהי $R \subseteq A^2$ יחס מעל A.
ההרכבה של R עם **עצמו** $n \in \mathbb{N}^+$ פעמים מוגדרת להיות:

$$R^{(n)} = \begin{cases} R^{(n-1)} \circ R & n > 1 \\ R & n = 1 \end{cases}$$

טענה. יהי R יחס מעל קבוצה A ויהיו $m, n \in \mathbb{N}^+$. אזי

$$R^{(m)} \circ R^{(n)} = R^{(m+n)}$$

הגדרה. תהינה A, B קבוצות, ויהי $R \subseteq A \times B$

1. R הוא **מלא בְּ-A** אם
$$\forall a \in A. \exists b \in B. \langle a, b \rangle \in R$$

2. R הוא **חד ערכי** אם
$$\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. (\langle a, b_1 \rangle \in R \land \langle a, b_2 \rangle \in R) \to b_1 = b_2$$

טענה. תהינה A, B, C קבוצות, ויהיו $S \subseteq A \times B, R \subseteq B \times C$.

1. אם R, S מלאים ב-A, B בהתאמה, אז $R \circ S$ מלא ב-A.
2. אם R, S חד ערכיים, אז $R \circ S$ חד ערכי.

פונקציות

הגדרה. יחס $f \subseteq A \times B$ מקבוצה A לקבוצה B הוא **פונקציה** אם הוא מלא ב-A וחד ערכי.
מתמטית: יחס $f \subseteq A \times B$ הוא פונקציה אם ורק אם

$$(\forall a \in A. \exists b \in B. \langle a, b \rangle \in f) \land (\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. (\langle a, b_1 \rangle \in f \land \langle a, b_2 \rangle \in f) \to b_1 = b_2)$$

או באופן שקול אם ורק אם
$$\forall a \in A. \exists! b \in B. \langle a, b \rangle \in f$$

הגדרה. יחס R מקבוצה A לקבוצה B נקרא **פונקציה חלקית** אם הוא חד ערכי.

סימון.

1. אם f פונקציה מקבוצה A לקבוצה B ומתקיים $\langle a, b \rangle \in f$ נהוג לכתוב $\boldsymbol{f(a) = b}$, ונאמר ש-b הוא **התמונה של $\boldsymbol{a}$**, וש-a הוא **המקור של $\boldsymbol{b}$**.

2. את **קבוצת הפונקציות מְ-A לְ-B** נסמן בְּ-$A \to B$ או B^A.

טענה. תהינה A, B קבוצות. $A \to B \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$.

הגדרה. תהי f פונקציה.

1. **התחום(domain)** של $f \in A \to B$ הוא A.

סימון.

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(f) &\triangleq \{a \in A \,|\, \exists b \in B. \langle a, b\rangle \in f\}\\ &\triangleq \{\pi_1(z) \,|\, z \in f\}\end{aligned}$$

2. קבוצה B נקראת **טווח** (range) של f אם

$$\forall x \in \mathrm{Dom}(f). f(x) \in B$$

3. **התמונה** של $f \in A \to B$ מוגדרת באופן הבא

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\boldsymbol{f}) &\triangleq \{y \in B \,|\, \exists x \in \mathrm{Dom}(f). y = f(x)\}\\ &\triangleq \{f(x) \,|\, x \in \mathrm{Dom}(f)\}\end{aligned}$$

טענה. קבוצה B היא טווח של פונקציה f אם ורק אם $\mathrm{Im}(f) \subseteq B$.

טענה (**עקרון האקסטנציונליות עבור פונקציות**). תהינה f, g פונקציות. אזי

$$f = g \iff ((\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)) \wedge \forall x \in \mathrm{Dom}(f). f(x) = g(x))$$

סימון. במקום לכתוב $f \in A \to B$ לעיתים נכתוב $f : A \to B$.

הגדרה. בהינתן $f : A \to B$, נסמן

$$f(a) = \iota b \in B. \langle a, b\rangle \in f$$

איוטא - היחיד שמקיים.

סימון (**דרכים לרישום פונקציות**). תהינה A, B קבוצות. כל פונקציה $f \in A \to B$ ניתנת לרישום באופנים הבאים:

1. כיחס (קבוצת זוגות סדורים)

$$f = \{\langle x, y\rangle \in A \times B \,|\, y = f(x)\}$$

2. בכתיב "סטנדרטי"; אם t הוא ביטוי אז לכל $x \in A$ מתקיים

$$f(x) = t$$

3. כתיב למדא (lambda)

אם t הוא ביטוי אז $\boldsymbol{\lambda x \in A.t}$ מתאר את הפונקציה (אולי פונקציה חלקית) כך שמתקיים:

(א) תחומה הוא A

(ב) מחזירה לכל $s \in A$ את ערך הביטוי t שמציבים בו במקום כל מופע של x את s (בקיצור $t\left(s/x\right)$)

הגדרה. תהי קבוצה A וביטוי t, אזי:

1. **כלל α לפונקציות**:
$$\lambda y\in A.t=\lambda x\in A.t\left(x/y\right)$$

2. **כלל β לפונקציות:**
$$\left(\lambda x\in A.t\right)\left(s\right)=t\left(s/x\right)$$

3. **כלל η לפונקציות:**
$$\lambda x\in\mathrm{Dom}\left(f\right).t\left(x\right)=t$$

הגדרה. בהינתן פונקציה $f:A\to B$ וקבוצה $X\subseteq A$, **התמונה של X תחת** f מסומנת על ידי $\boldsymbol{f\left[X\right]}$ ומוגדרת על ידי

$$f\left[X\right]\triangleq\left\{ f\left(a\right)|a\in X\right\}$$

הגדרה. בהינתן פונקציה $f:A\to B$ וקבוצה $Y\subseteq B$, **קבוצת המקורות של Y תחת f** מסומנת על ידי $\boldsymbol{f^{-1}\left[Y\right]}$ ומוגדרת על ידי

$$f^{-1}\left[Y\right]\triangleq\left\{ x\in A\,|\,f\left(x\right)\in Y\right\}$$

הגדרה (הרכבת פונקציות). אם $f:A\to B$ וְ-$g:B\to C$ אז $g\circ f$ היא הפונקציה

$$g\circ f\triangleq\lambda a\in A.g\left(f\left(a\right)\right)$$

טענה (**הרכבה היא אסוציאטיבית**). תהינה $f:A\to B,g:B\to C,h:C\to D$. אז

$$h\circ\left(g\circ f\right)=\left(h\circ g\right)\circ f$$

הגדרה. תהא $f:A\to B$ פונקציה. $g:B\to A$ נקראת **הפונקציה ההופכית** של f אם מתקיים

$$g\circ f=I_{A}$$

וגם

$$f\circ g=I_{B}$$

מסמנים $\boldsymbol{f^{-1}}\triangleq g$.

משפט (יחידות הפונקציה ההופכית). תהינה A,B קבוצות ותהי $f:A\to B$. אם ל-f קיימת פונקציה הופכית g אז היא **יחידה**.

הגדרה. תהא $f:A\to B$ פונקציה.

1. f תיקרא **חד חד ערכית** (חח"ע) אם מתקיים

$$\forall x_1, x_2 \in A. f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$$

ניסוח שקול (קונטרפוזיציה)

$$\forall x_1, x_2 \in A. x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$$

2. f תיקרא **על B** אם מתקיים

$$\forall y \in B. \exists x \in A. f(x) = y$$

ניסוח שקול

$$B \subseteq \mathrm{Im}(f)$$

הערה. תהי פונקציה $f : A \to B$, ויהי $f^{-1} \subseteq B \times A$ היחס ההפוך ל-f.

1. f חח"ע אם ורק אם f^{-1} **חד ערכי**.
2. f על B אם ורק אם f^{-1} **מלא ב-B**.

טענה. תהינה A, B, C קבוצות ותהינה $f : A \to B$ וְ-$g : B \to C$.

1. אם f וְ-g חח"ע אז $g \circ f$ חח"ע.
2. אם f על B ו-g על C אז $g \circ f$ על C.

הגדרה. $f : A \to B$ היא **זיווג** מ-A ל-B אם f חח"ע ועל B.

משפט. תהינה A, B קבוצות.
$f : A \to B$ היא זיווג מ-A ל-B אם ורק אם קיימת ל-f פונקציה הופכית $g : B \to A$.

הערה. לכן קוראים לזיווג גם **פונקציה הפיכה**.

הגדרה. תהי E קבוצה ותהי $A \subseteq E$ תת"ק של E. נגדיר את **הפונקציה האופיינית של A בקבוצה E**

$$\chi_A^{(E)} \triangleq \lambda x \in E. \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

טענה. לכל קבוצה E קיים זיווג מ-$\mathcal{P}(E)$ ל-$E \to \{0,1\}$.

הגדרה. צמצום של פונקציה $f : A \to B$ לקבוצה $C \subseteq A$ מסומן $f|_C$ ומוגדר על ידי

$$f|_C \triangleq \lambda x \in C. f(x)$$

טענה. אם $f : A \to B$ זיווג ו-$C \subseteq A$ אז $f|_C$ זיווג מ-C ל-$f[C]$.

הגדרה. תהינה A, B, C קבוצות לא ריקות. הפונקציה

$$G = \lambda f \in A \to (B \to C) . \lambda \langle a, b \rangle \in A \times B . (f(a))(b)$$

נקראת פונקצית Curry וההופכית שלה נקראת UnCurry.

יחסי שקילות

הגדרה. יחס S בקבוצה A (או מעל קבוצה A) נקרא **סימטרי** אם

$$\forall a, b . aSb \to bSa$$

טענה. יחס S הוא סימטרי אם ורק אם $S^{-1} = S$.

הגדרה. יחס S בקבוצה A נקרא **טרנזיטיבי** אם

$$\forall a, b, c . aSb \wedge bSc \to aSc$$

טענה. יחס S הוא טרנזיטיבי אם ורק אם $S \circ S \subseteq S$.

הגדרה. יחס S בקבוצה A נקרא **רפלקסיבי** אם

$$\forall a \in A . aSa$$

טענה. יחס S בקבוצה A הוא רפלקסיבי אם ורק אם $I_A \subseteq S$.

הגדרה. יחס E נקרא **יחס שקילות** אם הוא **רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי**.

טענה. יהיו R, S יחסי שקילות בקבוצה A.
אם $R \circ S = S \circ R$ אז $R \circ S$ יחס שקילות.

הגדרה. יהי E יחס שקילות בקבוצה A.
מחלקת השקילות של איבר $a \in A$ מסומנת ב-$\boldsymbol{[a]_E}$ ומוגדרת על ידי

$$[a]_E = \{b \in A \,|aEb\} \subseteq A$$

טענה. יהי E יחס שקילות בקבוצה A. התנאים הבאים שקולים:

1. aEb
2. $[a]_E = [b]_E$
3. $[a]_E \cap [b]_E \neq \emptyset$

הגדרה. יהי יחס שקילות E בקבוצה A.
קבוצת המנה של A לפי E מסומנת ב-$\boldsymbol{A/E}$ ומוגדרת על ידי

$$A/E \triangleq \{[a]_E \,|a \in A\} \subseteq \mathcal{P}(A)$$

הגדרה. תהי A קבוצה. **חלוקה של A** (partition) היא קבוצה $\Pi\subseteq\mathcal{P}(A)$ שמקיימת את התנאים הבאים:

1. **אין חלקים ריקים:**

$$\emptyset\notin\Pi$$

2. **Π מכסה את כל A:**

$$\forall a\in A.\exists M\in\Pi.a\in M$$

ניסוח שקול:

$$A\subseteq\bigcup\Pi$$

3. **החלקים זרים:**

$$\forall M_1,M_2\in\Pi.M_1\neq M_2\to M_1\cap M_2=\emptyset$$

או באופן שקול (קונטרפוזיציה):

$$\forall M_1,M_2\in\Pi.M_1\cap M_2\neq\emptyset\to M_1=M_2$$

משפט. תהי קבוצה A.

1. לכל יחס שקילות E בקבוצה A, A/E היא **חלוקה** של A.
2. תהא Π חלוקה של A.
   היחס S_Π שמוגדר על ידי

$$S_\Pi=\{\langle a,b\rangle\in A\times A\,|\exists M\in\Pi.a\in M\wedge b\in M\}$$

   הוא **יחס שקילות**.

טענה. לכל חלוקה Π של קבוצה A אם

$$S_\Pi=\{\langle a,b\rangle\in A\times A\,|\exists M\in\Pi.a\in M\wedge b\in M\}$$

אז מתקיים $A/S_\Pi=\Pi$.

משפט. תהא קבוצה A.
בין קבוצת יחסי השקילות ב-A לקבוצת החלוקות של A קיים **זיווג**.

הגדרה. קבוצה $X\subseteq A$ נקראת מערכת נציגים של יחס שקילות S אם לכל $a\in A$ **קיים ויחיד** $x\in X$ כך ש-$\langle a,x\rangle\in S$.

הגדרה. תהינא A,B קבוצות ויחס שקילות $S\subseteq A^2$. פונקציה $f\in A\to B$ תיקרא **לא תלויה בנציג ביחס לְ-S** אם

$$\forall x,y\in A.xSy\to f(x)=f(y)$$

יחסי סדר

סימון. מקובל לסמן:

1. יחס סדר חלש ב-$\leq$.
2. יחס סדר חזק ב-$<$.

הגדרה. יחס S בקבוצה A נקרא **אנטי-סימטרי** אם

$$\forall a, b. aSb \wedge bSa \to a = b$$

טענה. אם יחס S בקבוצה A הוא סימטרי וגם אנטי-סימטרי אז

$$S \subseteq I_A$$

הגדרה. יחס S בקבוצה A נקרא **יחס סדר חלש** אם הוא **טרנזיטיבי**, **רפלקסיבי** ו**אנטי-סימטרי**.

הגדרה. יהי S יחס סדר חלש בקבוצה A.

1. איבר $b \in A$ יקרא **מינימלי ביחס לְ-S** אם
$$\forall a \in A. a \neq b \to \neg aSb$$
2. איבר $b \in A$ יקרא **מקסימלי ביחס לְ-S** אם
$$\forall a \in A. a \neq b \to \neg bSa$$
3. איבר $b \in A$ יקרא **איבר גדול ביותר ביחס לְ-S** אם
$$\forall a \in A. aRb$$
4. איבר $b \in A$ יקרא **איבר קטן ביותר ביחס לְ-S** אם
$$\forall a \in A. bRa$$

הגדרה. יחס S בקבוצה A נקרא **אנטי-סימטרי חזק** אם

$$\forall a, b. aSb \to \neg bSa$$

הגדרה. יחס S בקבוצה A נקרא **יחס סדר חזק** אם הוא **טרנזיטיבי** ו**אנטי-סימטרי חזק**.

הגדרה.

1. יחס סדר (חלש) S בקבוצה A נקרא **יחס סדר מלא** אם
$$\forall a, b \in A. aSb \vee bSa$$

2. יחס סדר חזק S בקבוצה A נקרא **יחס סדר חזק מלא** אם מתקיים

$$\forall a,b\in A.aSb\vee bSa\vee a=b$$

הערה.

1. לעיתים במקום **מלא** אומרים **לינארי/קווי** או **יחס סדר טוטאלי (total)**.
2. יחס סדר מלא זה **לא שקול** ליחס סדר שהוא יחס מלא.

עוצמות

מושגי יסוד

הגדרה. שתי קבוצות A,B נקראות **שוות עוצמה** אם קיים זיווג $f:A\to B$.

סימון. $A\sim B$

הגדרה. קבוצה A נקראת **סופית** אם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך שמתקיים

$$A\sim\{k\in\mathbb{N}\,|1\le k\le n\}$$

הגדרה. קבוצה שאינה סופית נקראת **אינסופית**.

הערה. $\emptyset$ סופית כי עבור $n=0$

$$\{k\in\mathbb{N}\,|n\le k\le 0\}=\emptyset$$

ולכן זיווג הוא $\emptyset:\emptyset\to\emptyset$.

טענה. תהינא A,B קבוצות.

אם A סופית ו-$B\subset A$ אז $\neg A\sim B$.

טענה. היחס* $\sim$ הוא יחס שקילות.

$*$ - צריך להגדיר פורמלית את הקבוצה שבה הוא יחס.

הגדרה. **עוצמה** היא מחלקת שקילות* של $\sim$.

סימון. $|A|$ זו **העוצמה של $\boldsymbol{A}$**.

כלומר $A\sim B$ אם ורק אם $|A|=|B|$.

הגדרה (המספרים הטבעיים)**.** לכל $n\in\mathbb{N}^+$ נגדיר

$$0\triangleq|\emptyset|$$
$$n\triangleq|\{k\in\mathbb{N}\,|k<n\}|$$

טענה. תהינה A,B,A',B' קבוצות. אם A,B זרות ו-A',B' זרות כך שמתקיים $A\sim A'$ ו-$B\sim B'$ אזי

$$A\cup B\sim A'\cup B'$$

לכסון

הגדרה. העוצמה של הקבוצה $\mathbb{N}$ תסומן $\aleph_0 \triangleq |\mathbb{N}|$ ותיקרא **אלף אפס**.

הגדרה. קבוצה A תיקרא **בת-מניה** אם $|A| = \aleph_0$.

טענה. לכל קבוצה בת מניה B קיימת תת קבוצה $B^{'}$ בת מניה כך ש-$B^{'} \subset B$.

טענה. מתקיים:

1. $\forall k \in \mathbb{N}^{+}. \left|\mathbb{N}^{k}\right| = \aleph_0$.
2. $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

הגדרה. העוצמה של הקבוצה $\mathbb{R}$ תסומן $|\mathbb{R}| = \aleph$ ותיקרא **עוצמת הרצף**.

טענה. יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $a < b$, אזי:

$$|[a,b]| = |[a,b)| = |(a,b]| = |(a,b)|$$

אקסיומה (אקסיומת הבחירה). תהא B קבוצה לא ריקה של קבוצות לא ריקות, אז קיימת פונקציה $f : B \to \bigcup B$ כך שלכל $A \in B$ מתקיים $f(A) \in A$.

משפט. נניח כי מערכת האקסיומות ZF קונסיסטנטית. אזי:

1. **(גדל)** $\mathrm{ZFC} = \mathrm{ZF} \cup \mathrm{AC}$ מערכת אקסיומות קונסיסטנטית.
2. **(כהן)** $\mathrm{ZF} \cup \neg\mathrm{AC}$ מערכת אקסיומות קונסיסטנטית.

משפט. תהי קבוצה A, אז הבאים שקולים:

1. קיימת $B \subseteq A$ בת מניה.
2. קיימת $A^{'} \subset A$ כך ש-$A \sim A^{'}$.
3. A אינסופית.

אלגוריתם (לכסון). נניח שנתונה לנו קבוצה A שאנו מעוניינים להוכיח שהיא אינה מעוצמה של קבוצה B.

1. נניח בשלילה כי A מעוצמה $|B|$, ולכן קיים זיווג $f : B \to A$.
2. נגדיר $h \in A$ שתלויה ב-f באופן שתהיה שונה מכל איבר בתמונה של f.
3. נראה ש-f לא על A בכך שנראה סתירה לכך שקיים $x \in B$ כך ש-$h = f(x)$.

משפט (קנטור). $\aleph_0 \neq \aleph$.
ובאופן כללי יותר לכל קבוצה A מתקיים $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$.

סדר של עוצמות

הגדרה. תהינה A,B קבוצות. נאמר כי $|\boldsymbol{A}|\leq|\boldsymbol{B}|$ אם קיימת פונקציה חח"ע $f:A\to B$.

טענה. ההגדרה לעיל טובה (לא תלויה בנציג).
כלומר, לכל קבוצות A,B מתקיים כי אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע אז לכל $A'\in|A|,B'\in|B|$ קיימת פונקציה $f':A'\to B'$ חח"ע.

טענה. תהיינה A,B קבוצות, אז הבאים שקולים:

1. $|A|\leq|B|$.
2. קיימת $B'\subseteq B$ כך ש-$B'\sim A$.
3. $A=\emptyset$ או שקיימת פונקציה $g:B\to A$ על A.

הגדרה. תהינא A,B קבוצות. נסמן $|A|<|B|$ אם מתקיים $|A|\leq|B|$ וגם $|A|\neq|B|$.

טענה. היחס $\leq$ בין עוצמות הוא יחס סדר מלא.

טענה. תהינא A,B קבוצות. אם $A\subseteq B$ אז $|A|\leq|B|$.

משפט (קנטור-שרדר-ברנשטיין). תהינה A,B קבוצות.

$$|A|=|B|\iff|A|\leq B\wedge|B|\leq|A|$$

משפט (סנדוויץ'). תהינה A,B,C קבוצות. אם $A\subseteq B\subseteq C$ ו-$A\sim C$ אז $A\sim B\sim C$.

טענה. תהי קבוצה A ויהי $T\in\mathcal{P}\left(A\times A\right)$ יחס שקילות. אז $|A/T|\leq|A|$.

משפט. לכל קבוצה A מתקיים $|\mathcal{P}\left(A\right)|=2^{|A|}$. בנוסף, מתקיים $2^{|A|}>|A|$.

פעולות על עוצמות

הגדרה. תהיינה A,B קבוצות. נגדיר:

1. $|A|+|B|\triangleq|A\cup B|$ עבור A ו-B זרות. עבור קבוצות לא בהכרח זרות, ניתן להגדיר $|A|+|B|=|(A\times\{0\})\cup(B\times\{1\})|$.
2. $|A|\cdot|B|\triangleq|A\times B|$.
3. $|A|^{|B|}\triangleq|B\to A|$

טענה. ההגדרה לעיל טובה (לא תלויה בנציגים).

טענה **(זהויות שימושיות)**.

1. $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$.
2. $\aleph+\aleph_0=\aleph$.
3. $\aleph+\aleph=\aleph$.

4. $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$.

טענה (**חשבון עוצמות**). תהינא a, b, c עוצמות. אזי:

1. **קומוטטיביות:**

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

2. **אסוציאטיביות:**

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. **דיסטריבוטיביות:**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

4. **קיום עוצמה אדישה לחיבור:**

$$a + 0 = 0 + a = a$$

5. **קיום עוצמה אדישה לכפל:**

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

6. תכונות נוספות:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$
$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1$$
$$1^a = 1$$

7. אם $a \neq 0$ אז:

$$0^a = 0$$

בנוסף:

$$0^0 = 1$$

8. **חוקי חזקות:**

$$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$$
$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$
$$\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$$

9. **מונוטוניות:** אם $a \leq c$ ו-$b \leq d$ אז

$$a + b \leq c + d$$
$$a \cdot b \leq c \cdot d$$
$$a^b \leq c^d$$

טענה. לכל $k \in \mathbb{N}^+$ ולכל קבוצה A מתקיים: $\left|A^k\right| = |A|^k$.

טענה. תהינא a, b עוצמות. אם a אינסופית וְ-b סופית או בת מניה אזי

$$a + b = a$$

משפט. תהא I קבוצה, ותהי A_i קבוצה לכל $i \in I$. אם $|I| \leq \aleph_0$ וגם $|A_i| \leq \aleph_0$ לכל $i \in I$ אז $\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \leq \aleph_0$.

טענה. קבוצת תתי הקבוצות הסופיות של $\mathbb{N}$ היא בת מניה. פורמלית:

$$|\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |X| \in \mathbb{N}\}| = \aleph_0$$

טענה. קבוצת תתי הקבוצות האינסופיות של $\mathbb{N}$ היא מעוצמת הרצף. פורמלית:

$$|\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |X| \notin \mathbb{N}\}| = \aleph$$

טענה. יהי Σ א"ב סופי. אז קיימת $f \in \mathbb{N} \to \{0,1\}$ כך שאף תוכנית מחשב מעל Σ לא יכולה לחשב.