מתמטיקה בדידה 2 (0368-1119)

רון גולדמן

תוכן העניינים

מבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים

מבוא לקומבינטוריקה

שיטות ספירה בסיסיות

הגדרה. יהי $n \in \mathbb{N}^+$. נסמן
$$[n] = \left\{ i \in \mathbb{N}^+ \,|i \leq n \right\}$$

טענה (**עקרון הכפל**). תהא A קבוצה. אם קיימות קבוצות $A_1, \ldots, A_n$ כך שמתקיים $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ אזי
$$|A| = |A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

הגדרה. נאמר שהקבוצות $A_1, \ldots, A_n$ **זרות בזוגות** אם
$$\forall i \neq j. A_i \cap A_j = \emptyset$$

טענה (**עקרון החיבור**). תהא A קבוצה. אם קיימות $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות זרות בזוגות כך ש-$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ אזי
$$|A| = \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

הגדרה. תהא A קבוצה. פונקציית זיווג $f \in A \to A$ נקראת **תמורה** (permutation; פרמוטציה) של A.

הגדרה. תהא A קבוצה מעוצמה $n \in \mathbb{N}$. מספר התמורות של A תסומן $\boldsymbol{n!}$ (n עצרת).

טענה. יהי $n \in \mathbb{N}$.
$$n! = n\,(n-1)\,(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i$$

הגדרה. יהיו $k \leq n \in \mathbb{N}$. נגדיר את $\boldsymbol{n}$ **בחר** $\boldsymbol{k}$ להיות
$$\binom{n}{k} \triangleq \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

טענה. יהי $n \in \mathbb{N}$. מספר הדרכים לבחור $n \geq k \in \mathbb{N}$ איברים מתוך $[n]$ הוא

חזרות/חשיבות לסדר	כן	לא
אסור	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
מותר	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$

טענה. לכל $k \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים
$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{\ell+n-1}{\ell} = \binom{k+n}{k}$$

זהויות קומבינטוריות

טענה. לכל $k \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

טענה. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

טענה. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

טענה. לכל $k \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

משפט (הבינום של ניוטון). לכל $n \in \mathbb{N}$ ו-$a, b \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

טענה **(זהות פסקל)**. לכל $n \in \mathbb{N}^+$ ו-$n \geq k \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

טענה **(מקל ההוקי של פסקל)**. לכל $n, k \in \mathbb{N}$ כך ש-$k \leq n$ מתקיים:

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

עקרון שובך היונים

משפט (עקרון שובך היונים). יהי $n \in \mathbb{N}^+$. אם $f : [n+1] \to [n]$ אז f לא חח"ע.
במילים, אם שמים $n+1$ יונים ב-n שובכים אז יהיה שובך עם לפחות 2 יונים.

משפט (עקרון שובך היונים המוכלל). יהיו $m > n \in \mathbb{N}^+$. אם $f : [m] \to [n]$ אז

$$\exists k \in [m] . \left| f\left[\{k\}\right] \right| \geq \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$$

במילים, אם שמים $m > n$ יונים ב-n שובכים אז יהיה שובף המכיל לפחות $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ יונים.

עקרון ההכלה וההדחה

משפט (עיקרון ההכלה וההדחה). לכל קבוצות A,B מתקיים

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

וגם לכל $A,B\subseteq U$

$$\left|\overline{A}\cap\overline{B}\right|=|U|-(|A|+|B|)+|A\cap B|$$

הגדרה. תהינה $A_1,\ldots,A_n\subseteq U$ קבוצות

$$\bigcap_{i\in\emptyset}\{\emptyset\}\triangleq\emptyset$$
$$\bigcup_{i\in\emptyset}A_i\triangleq U$$

משפט (נוסחת ההכלה וההדחה הכללית). לכל $A_1,\ldots,A_n$ קבוצות מתקיים

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{\emptyset\neq S\subseteq[n]}(-1)^{|S|+1}\left|\bigcap_{j\in S}A_j\right|$$

וגם לכל $A_1,\ldots,A_n\subseteq U$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right|=\sum_{S\subseteq[n]}(-1)^{|S|}\left|\bigcap_{j\in S}A_j\right|$$

משפט (נוסחת ההכלה וההדחה הסימטרית). לכל $A_1,\ldots,A_n$ שוות עוצמה מתקיים

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left|\bigcap_{j\in[k]}A_j\right|$$

וגם לכל $A_1,\ldots,A_n\subseteq U$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right|=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\left|\bigcap_{j\in[k]}A_j\right|$$

הגדרה. תהינא $n,k\in\mathbb{N}$ כך ש-$k\leq n$. **מספר סטירלינג מהסוג השני** $\left\{\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\}$ הוא מספר החלוקות הלא הריקות של $[n]$ ל-k תאים.

הגדרה. תהא A קבוצה. נאמר ש-$a\in A$ היא **נקודת שבת** של $f\in A\to A$ אם $f(a)=a$.

הגדרה. יהי $n\in\mathbb{N}$. מספר התמורות על $[n]$ ללא נקודות שבת הוא $\boldsymbol{D_n}$.

טענה. יהי $n\in\mathbb{N}$, אזי:

$$D_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=\begin{cases}\left\lceil\frac{n!}{e}\right\rceil & n\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \left\lfloor\frac{n!}{e}\right\rfloor & n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$$

נוסחאות נסיגה

הגדרה. יהיו $c_1,\ldots,c_r\in\mathbb{R}$. נוסחת נסיגה מהצורה

$$f\left(n\right)=c_1f\left(n-1\right)+\ldots+c_rf\left(n-r\right)$$

נקראת **נוסחת נסיגה הומוגנית מסדר r עם מקדמים קבועים**.
הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה מוגדר על ידי $p\left(x\right)=x^r-c_1x^{r-1}-\ldots-c_r$

משפט. תהא

$$f\left(n\right)=c_1f\left(n-1\right)+\ldots+c_rf\left(n-r\right)$$

נוסחת נסיגה הומוגנית מסדר r עם מקדמים קבועים.
אם שורשי הפולינום האופייני $\alpha_1,\ldots,\alpha_r\in\mathbb{R}$ הם **שונים**. אז לכל $a_1,\ldots,a_r\in\mathbb{R}$ הביטוי

$$a_1\alpha_1^n+\ldots+a_r\alpha_r^n$$

מקיים את נוסחת הנסיגה.
אם בנוסף נתונים r תנאי התחלה $f\left(0\right),\ldots,f\left(r-1\right)$ אז קיימים $a_1,\ldots,a_r\in\mathbb{R}$ יחידים.

מבוא לתורת הגרפים

מושגים בסיסיים

הגדרה. **גרף לא מכוון ופשוט** הוא זוג סדור $G=\left(V,E\right)$ כאשר $E\in\mathcal{P}\left(V\right)$ מקיימת:

$$E\subseteq\left\{A\subseteq V\,\middle|\,\left|A\right|=2\right\}$$

הערה.

- V סופית.
- E יכולה להיות ריקה.
- אם $e=\left\{v_1,v_2\right\}\in E$ נאמר שהקשת e **נוגעת** או **חלה** על **צמתי הקצה** או **הקצוות** v_1,v_2. נאמר גם ש-v_1,v_2 **שכנים** או **סמוכים**.
- **הדרגה** של צומת $v\in V$, המסומנת ב-$d\left(v\right)$ או $\deg\left(v\right)$ או d_v היא מספר השכנים של v.

הגדרה. יהי $G=\left(V,E\right)$ גרף. כאשר מגדירים סדר ל-$V=\left\{v_1,\ldots,v_{|V|}\right\}$, **מטריצת השכנויות** של G היא המטריצה $M\in\left\{0,1\right\}^{|V|\times|V|}$ שמוגדרת באופן הבא:

$$\forall i,j\in\left[\left|V\right|\right].\ m_{ij}=\begin{cases}1 & \left\{v_i,v_j\right\}\in E\\ 0 & \left\{v_i,v_j\right\}\notin E\end{cases}$$

הגדרה. יהי $n\in\mathbb{N}$. נגדיר $V_n=\left[n\right]$ אז:

1. גרף **שרוך** הוא גרף מהצורה

$$P_n=\left(V_n,E_n\right)$$

כאשר

$$E_n = \{\{i, i+1\} \,|i \in [n-1]\,\}$$

2. גרף **מעגל** הוא גרף מהצורה

$$C_n = (V_n, E_n)$$

כאשר

$$E_n = \{\{i, i+1\} \,|i \in [n-1]\,\} \cup \{\{n, 1\}\}$$

3. הגרף **השלם** או **הקליקה** הוא הגרף

$$K_n = (V_n, E_n)$$

כאשר

$$E_n = \{\{i, j\} \,|i, j \in [n] \wedge i \neq j\,\}$$

4. הגרף **הריק** הוא הגרף

$$G_n = (V_n, E_n)$$

כאשר $E_n = \emptyset$.

5. גרף **כוכב** הוא גרף מהצורה

$$S_n = (V_n, E_n)$$

כאשר

$$E_n = \{\{1, k+1\} \,|k \in [n-1]\,\}$$

הגדרה. יהי $G = (V, E)$ גרף. **הגרף המשלים** של G מוגדר להיות

$$G^c \triangleq \left(V, E^{'}\right)$$

כאשר

$$E^{'} = \{\{u, v\} \,|u, v \in V \wedge u \neq v \wedge \{u, v\} \notin E\,\}$$

טענה. יהי $n \in \mathbb{N}$. אם K_n הגרף השלם על n צמתים, ו-G_n הגרף הריק אזי

$$G_n^c = K_n \wedge K_n^c = G_n$$

טענה. בכל גרף עם לפחות שני צמתים יש שני צמתים עם אותה דרגה.

טענה. מספר הקשתות המקסימלי בגרף בעל $n \in \mathbb{N}$ צמתים הוא $\binom{n}{2}$.

טענה. מספר הגרפים על $n \in \mathbb{N}$ צמתים הוא $2^{\binom{n}{2}}$.

טענה. מספר הגרפים על $n \in \mathbb{N}$ צמתים בעלי $k \in \mathbb{N}$ קשתות הוא $\binom{\binom{n}{2}}{k}$.

משפט. יהי $G=(V,E)$ גרף. אזי
$$2\left|E\right|=\sum_{v\in V}\deg\left(v\right)$$

מסקנה (למת לחיצות הידיים). בכל גרף יש מספר זוגי של צמתים עם דרגה אי-זוגית.

מסלולים, מעגלים וקשירות

הגדרה. יהא $G=(V,E)$ גרף, ויהיו $u,v\in V$. **מסלול** מ-u ל-v ב-G הוא סדרה של צמתים $p=(u=v_0,v_1,v_2,\dots,v_m=v)\in V^{m+1}$ כך שלכל $i\in\{0\}\cup[m-1]$ מתקיים $\{v_i,v_{i+1}\}\in E$.
אורך המסלול מוגדר כמספר הקשתות במסלול (m לעיל).

טענה. יהא $G=(V,E)$ גרף, ויהי $v\in V$. אז v מסלול(ריק) מאורך 0 ב-G.

טענה. יהא $G=(V,E)$ גרף ויהיו $u,v\in V$. אם $\{u,v\}\in E$ אז $(u,v)\in V^2$ מסלול באורך 1 ב-G.

הגדרה. יהא $G=(V,E)$ גרף ויהי $m\in\mathbb{N}$. מסלול $p=(v_0,\dots,v_m)\in V^{m+1}$ ב-G נקרא **פשוט בצמתים** אם הוא לא חוזר על אותה צומת יותר מפעם אחת. כלומר לכל $i\neq j\in\{0\}\cup[m]$ מתקיים $v_i\neq v_j$.

טענה. יהא $G=(V,E)$ גרף ויהי $v\in V$. אז המסלול הריק v פשוט בצמתים.

הגדרה. יהא $G=(V,E)$ גרף ויהי $m\in\mathbb{N}$. מסלול $p=(v_0,\dots,v_m)\in V^{m+1}$ ב-G נקרא **פשוט בקשתות** אם אף קשת לא מופיעה בו יותר מפעם אחת. כלומר לכל $i\neq j\in\{0\}\cup[m]$ $\{v_i,v_{i+1}\}\neq\{v_j,v_{j+1}\}$.

הגדרה. יהא $G=(V,E)$ גרף ויהיו $u,v\in V$. **המרחק** בין u ו-v הוא אורך המסלול הקצר ביותר ביניהם, או "∞" במידה ואין מסלול בין u וְ-v.

הגדרה. יהא $G=(V,E)$ גרף. G נקרא **קשיר** אם בין כל זוג צמתים קיים מסלול.

הגדרה. יהא $G=(V,E)$ גרף ויהי $m\in\mathbb{N}$. מסלול $p=(v_0,v_1,\dots,v_m)\in V^{m+1}$ נקרא **מעגל** אם $m>0$ וְ-$v_0=v_m$.
מעגל נקרא **פשוט בצמתים** אם כל הצמתים $v_0,\dots,v_{m-1}$ שונים זה מזה.

הערה. מעגל פשוט אינו מסלול פשוט.

משפט. יהא $G=(V,E)$ גרף. אם G קשיר אז $|E|\geq|V|-1$.

הגדרה. יהא $G=(V,E)$ גרף. $G'=\left(V',E'\right)$ יקרא **תת גרף** של G אם הוא גרף ומתקיים $V'\subseteq V$ וגם $E'\subseteq E$.
נאמר ש-G' הוא **גרף מושרה** מ-V' אם $V'\subseteq V$ וגם $E'=\left\{\{u,v\}\in E\,\middle|\,u,v\in V'\right\}$.

הגדרה. יהי $G=(V,E)$ גרף. **רכיב קשירות** של G הוא תת גרף קשיר מקסימלי ב-G.

הגדרה. **עץ** הוא גרף קשיר וחסר מעגלים.

הגדרה. **יער** הוא גרף חסר מעגלים.

הגדרה. צומת עם דרגה 1 ביער נקרא **עלה**.

הגדרה. יהי $G=(V,E)$ גרף ויהי $v\in V$. אם $\deg(v)=0$ אז v נקרא **צומת מבודד**.

משפט. אם $G=(V,E)$ יער אז $|E|\leq|V|-1$.

למה. אם מסירים קשת מיער אז מספר רכיבי הקשירות גדל.

משפט. בכל יער עם קשת אחת לפחות קיימים שני עלים.

משפט. אם $G=(V,E)$ עץ אז $|E|=|V|-1$.

טענה. אם $G=(V,E)$ קשיר וגם $|E|=|V|-1$ אז G עץ.

טענה. יהי $G=(V,E)$ גרף. G הוא עץ אם ורק אם הוא חסר מעגלים מקסימלי בקשתות.

טענה. יהי $G=(V,E)$ גרף. G הוא עץ אם ורק אם הוא קשיר מינימלי בקשתות.

הגדרה. יהי $G=(V,E)$ גרף. **מעגל אוילר** ב-G הוא מעגל פשוט בקשתות שעובר בכל הקשתות ב-G.

משפט (אוילר). בגרף קשיר $G=(V,E)$ קיים מעגל אוילר אם ורק אם הדרגה של כל $v\in V$ היא זוגית.

למה. יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר ויהי $\emptyset\neq S\subset V$. אז קיים $v\in V\setminus S$ כך ש-$u\in S$ ו-$\{u,v\}\in E$.

למה. יהי $G=(V,E)$ גרף בעל דרגות זוגיות. אז כל $v\in V$ בעל דרגה חיובית משתתף במעגל פשוט בקשתות.

הגדרה. יהי $G=(V,E)$ גרף. **מעגל המילטוני** ב-G הוא מעגל פשוט בצמתים שעובר בכל צומת ב-V.

הגדרה. גרף $G=(V,E)$ הוא **המילטוני** אם הוא מכיל מעגל המילטוני.

משפט (דיראק). יהי $G=(V,E)$ גרף. אם לכל $v\in V$ מתקיים $\deg(v)\geq\left\lceil\frac{|V|}{2}\right\rceil$ אז G המילטוני.

נושאים נבחרים

נוסחת קיילי ומשפט קירכהוף

הגדרה. **עץ פורש** של גרף קשיר G הוא תת גרף קשיר של G המכיל את כל צמתי G ושאין בו מעגלים.

הגדרה. נסמן את מספר העצים הפורשים של הגרף המלא על n צמתים ב-T_n.

משפט (קיילי). $T_n=n^{n-2}$.

הוכחה באמצעות זיווג

הוכחה. נתאר זיווג φ בין קבוצת העצים הפורשים כך ששני צמתים בעץ "מסומנים" - אחד בכחול ואחד באדום לבין קבוצת הפונקציות $[n]\to[n]$. בחירת צומת כחול וצומת אדום תיעשה ב-n^2 דרכים כאשר מאפשרים לאותו צומת להיבחר ולכן נסיק:

$$n^2T_n=n^n$$

תהא $f:[n]\to[n]$, ניתן לתאר את f ע"י גרף **מכוון** $G=([n],E)$ כאשר $E=\{(k,f(k))\,|k\in[n]\}$.
נסתכל על המעגלים בלי "הזנבות", נסמן את הצמתים המשתתפים במעגלים ב-C ונצמצם את f ל-C.
נגדיר את העץ הפורש המזווג T עם צמתים כחול ואדום לפי השורה התחתונה, כלומר לפי $f|_C$ כאשר $\min(C)$ ייצבע בכחול ו-$\max(C)$ ייצבע באדום. את שאר הצמתים נעתיק לפי הגרף המכוון אך ללא הכיוונים:

$$(T=\{\{f(m),f(n)\}\,|m\in C\wedge n=\min(\{k\in C\,|m<k\})\}\cup\{\{m,f(m)\}\,|m\in[n]\setminus C\},B=\min(C),R=\max(C))$$

בכדי לחשב את φ^{-1} נבחין כי הצמתים על המסלול הקצר ביותר מהצומת הכחול לאדום יושבים על מעגלים, ובעצם $f|_C$ זה הצמצום המקסימלי של f המשרה זיווג. לכן

$$\begin{aligned}f|_C^{-1}(B)&=\min(C)\\ f|_C^{-1}(\iota v\in N(B))&=\min(C\setminus\{\min(C)\})\\ &\vdots\end{aligned}$$

כאשר $N(B)$ קבוצת השכנים של B במסלול הארוך (בוודאות יש אחד שם כי המסלול הוא יחיד), ממשיכים כך עד לחישוב $f|_C$, ואז משלימים את החישוב תוך שימוש בזנבות שהן לכל דבר ועניין בעצם מכוונים, שכן הצומת על המסלול אליו הזנבות מחוברים "משרה כיווניות". ■

הוכחה באמצעות נוסחת נסיגה

הגדרה. **יער פורש** של גרף G הוא תת גרף של G המכיל את כל צמתי G ושאין בו מעגלים.

הגדרה. עבור $k \in [n]$ נסמן ב-$T_{n,k}$ את מספר **היערות הפורשים** בעלי k רכיבי קשירות בדיוק בהם כל אחד מהצמתים $1, \ldots, k$ מוכל ברכיב קשיר משלו.

משפט. $T_{n,k} = k \cdot n^{n-k-1}$

הוכחה. נבחין כי אם לצומת 1 יש ℓ שכנים אז הסרתו תותיר אותנו עם $k-1$ צמתים ו-$k-1+\ell$ רכיבים.
על כן

$$\forall n \geq k \geq 1. T_{n,k} = \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} T_{n-1,k-1+\ell}$$

בנוסף

$$\forall n > 0. T_{n,0} = 0$$
$$T_{0,0} \triangleq 1$$

כל שנותר כעת הוא להוכיח את המשפט באינדוקציה על n לכל $k \leq n \in \mathbb{N}$ תוך שימוש בנוסחת הנסיגה.

בסיס: עבור $n=1$, אם $k=0$ אז $T_{1,0} = 0 = 0 \cdot 1^{1-0-1}$. עבור $k=1$ מתקיים $T_{1,1} = \sum_{\ell=0}^{0} \binom{1-1}{\ell} T_{1-1,1-1+\ell} = T_{0,0} = 1 = 1 \cdot 1^{1-1-1}$.

צעד: נניח כי לכל $n-1 \geq m \in \mathbb{N}$ מתקיים $T_{n-1,m} = m \cdot (n-1)^{n-m-2}$, אז לכל $n \geq k \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\begin{aligned}
T_{n,k} &= \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} T_{n-1,k-1+\ell} = \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} (k-1+\ell) \cdot (n-1)^{n-1-k+1-\ell-1} \\
\left[j \triangleq n-k-\ell\right] &= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (n-1-j) \cdot (n-1)^{j-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (n-1)^{j} - \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-k}{j} j (n-1)^{j-1} \\
[\text{Binomial Theorom}] &= n^{n-k} - (n-k) \sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{n-k-1}{j} (n-1)^{j} \\
&= n^{n-k} - (n-l) n^{n-1-k} = k \cdot n^{n-1-k}
\end{aligned}$$

■

מסקנה. אז לפי המשפט לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים **משפט קיילי**:

$$T_n = T_{n,1} = 1 \cdot n^{n-1-1} = n^{n-2}$$

הוכחה באמצעות אלגברה לינארית

הגדרה. בהינתן גרף קשיר ולא מכוון G נסמן ב-$T(G)$ את מספר העצים הפורשים של G.

הגדרה. בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ נגדיר מטריצה $B\in\{0,1\}^{|V|\times|E|}$ באופן הבא:

$$\forall v\in V,e\in E.B_{v,e}\triangleq\begin{cases}1 & v\in e\\ 0 & v\notin e\end{cases}$$

הגדרה. לכל גרף לא מכוון $G=(V,E)$ מהמטריצה B נגדיר מטריצה $C\in\{-1,0,1\}^{|V|\times|E|}$ בה בכל עמודה נחליף באופן שרירותי את אחד ה-1-ים ל--1. נסמן את קבוצת הבחירה לכל עמודה ב-U_e (אם אין 1 בעמודה אז $U_e=\emptyset$), אז

$$\forall v\in V,e\in E.C_{v,e}\triangleq\begin{cases}B_{v,e} & v\notin U_e\\ -B_{v,e} & v\in U_e\end{cases}$$

הגדרה. לכל גרף לא מכוון $G=(V,E)$ נגדיר $M\triangleq CC^T\in\{-1,0,1\}^{|V|\times|V|}$.

טענה. יהי גרף לא מכוון $G=(V,E)$.

1. M היא מטריצה סימטרית.
2. לכל $v\in V$ מתקיים $M_{v,v}=d_v$.

הוכחה.

1. מתקיים
$$M^T=\left(CC^T\right)^T=\left(C^T\right)^TC^T=CC^T=M$$

2. מתקיים
$$\begin{aligned}M_{v,v}=\left(CC^T\right)_{v,v}&=\sum_{e\in E}C_{v,e}\left(C^T\right)_{e,v}\\&=\sum_{e\in E}\left(C_{v,e}\right)^2\\&=\sum_{e\in E}B_{v,e}\end{aligned}$$

כל קשת שמכילה את v יוצאת ממנה ולכן
$$M_{v,v}=\sum_{e\in E}B_{v,e}=d_v$$

■

הגדרה. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. לכל $j \in [n]$ נגדיר את $\boldsymbol{A_j}$ באופן הבא:

$$\forall i,k \in [n-1]\,.\,(A_j)_{i,k} \triangleq \begin{cases} A_{i,k} & i,k<j \\ A_{i+1,k} & i \geq j, k<j \\ A_{i,k+1} & i<j, k\geq j \\ A_{i+1,k+1} & i,k \geq j \end{cases}$$

הגדרה. תהינא $A \in \mathbb{F}^{r\times c}$ ו-$C \subseteq [c]$. נגדיר את **המטריצה המושרית מ-$\boldsymbol{A}$ על עמודות $\boldsymbol{C}$** ב- $\boldsymbol{A_C}$ שמוגדרת כמטריצה $r \times |C|$ כך שהיא A ללא העמודות שלא ב-C.

משפט (קושי-בינה). תהי A מטריצה $r\times c$ ו-B מטריצה $c \times r$ כך ש-$r \leq c$. אז

$$\det(AB) = \sum_{\substack{C \subseteq [c] \\ |C| = r}} \det(A_C)\det\left(\left(B^T\right)_C\right)$$

משפט (קירכהוף). יהא $G=(V,E)$ גרף קשיר. לכל $v \in V$ מתקיים

$$T(G) = \det M_v$$

הוכחה. מכיוון ש-$M = CC^T$ אז את M_v ניתן לרשום כ-$M_v = C_v C_v^T$, לכן

$$\begin{aligned} \det M_v &= \det\left(C_v C_v^T\right) \\ &= \sum_{\substack{F \subseteq E \\ |F| = n-1}} \det\left((C_v)_F\right)^2 \end{aligned}$$

על כן ההוכחה תושלם אם נראה כי

$$\det(C_v)_F = \begin{cases} \pm 1 & \text{קשתות } F \text{ פורשות עץ ב-} G \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצד אחד, אם F לא פורשות את G אז קיים רכיב קשירות בתת גרף זה שאינו מכיל את v.
נבחין כי במקרה זה סכום השורות של כל רכיב קשירות זה ב-$(C_v)_F$ שווה לאפס שהרי כל עמודה מתאימה לקשת: אם הקשת נמצאת ברכיב אז ה-± 1 יתבטלו, ואם הקשת לא נמצאת העמודה היא עמודת אפסים. לכן $\det(C_v)_F$.
מצד שני, אם F פורשות עץ אז קיים עלה $u \neq v$.
כלומר קיימת שורה מתאימה לעלה זה, שבה כל הכניסות פרט לאחת היא אפס, והכניסה הנותרת היא ± 1. נפתח את הדטרמיננטה לפי שורה זו.
נבחין כי המטריצה שנותרנו איתה לאחרת הסרת השורה u והעמודה המתאימה (לקשת היחידה שחלה על u) מתאימה שוב לעץ, הפעם על $n-2$ צמתים. נמשיך בתהליך זה של פיתוח הדטרמיננטה לפי העלה הנוכחי, ובכל שלב נכפול את הביטוי הקיים ב-± 1. לכן $\det(C_v)_F = \pm 1$. ■

מסקנה. עבור הגרף המלא על n צמתים, לכל $v\in V$ מתקיים

$$M_v=\begin{pmatrix} n-1 & & -1 \\ & \ddots & \\ -1 & & n-1 \end{pmatrix}$$

לכן לפי **משפט קירכהוף** מתקיים **משפט קיילי**:

$$T_n=\det M_v=n^{n-2}$$

תורת ראמזי

הגדרה. יהא $K_n=(V,E)$ הגרף השלם על $n\in\mathbb{N}$ צמתים. **צביעת קשתות** K_n בשני צבעי כחול ואדום היא פונקציה $c:E\to\{B,R\}$.

נאמר שהגרף השלם יחד עם הצביעה הוא ***k*-ראמזי** אם כל תת-גרף בעל $k\in\mathbb{N}$ צמתים אינו מונוכרומטי, כלומר מכיל לפחות קשת אחת מכל צבע.

הגדרה. לכל $2\le s,t\in\mathbb{N}$ נסמן ב-$R=R(s,t)$ את המספר הקטן ביותר כך שכל צביעה בקשתות של K_R בשני צבעים - כחול ואדום אינה s-ראמזי או אינה t-ראמזי.

משפט (ראמזי / ארדש-סקרש). יהיו $2\le s,t\in\mathbb{N}$. אזי

$$R(s,t)\le\binom{s+t-2}{s-1}$$

טענה. יהיו $2\le s,t\in\mathbb{N}$. אזי

$$R(s,t)\le R(s-1,t)+R(s,t-1)$$

הוכחה. נראה שאם מספר הצמתים הוא $\overbrace{R(s-1,t)}^{A}+\overbrace{R(s,t-1)}^{B}$ אז כל צביעה בשני צבעים של K_{A+B} מכילה K_s כחול או K_t אדום.
נבחין כי לא ייתכן שלצומת נתון יש לכל היותר $A-1$ שכנים כחולים ולכל היותר $B-1$ שכנים אדומים. אכן, במקרה כזה מספר שכניו $\ge A-1+B-1=A+B-2$, אך יש לו $A+B-1$ שכנים ולכן זו סתירה.
נניח בה"כ שיש לצומת $v\in[n]$ כחול כלשהו לפחות A שכנים כחולים. מהגדרת A או שיש K_t אדום בשכונה של v, או שיש K_{s-1} כחול בשכונה של v שיחד עם v משרה K_s כחול.
אם v אדום נקבל את אותה מסקנה ולכן סיימנו. ■

משפט (ארדש-סקרש). יהיו $r,s\in\mathbb{N}$. אז לכל סדרה של מספרים ממשיים שונים $(r-1)(s-1)+1$ לפחות אחד מהבאים מתקיים:

- קיימת תת סדרה מונוטונית עולה ממש מאורך r.
- קיימת תת סדרה מונוטונית ורדת ממש מאורך s.

מספרי קטלן

הגדרה. יהי $n\in\mathbb{N}$. מחרוזת באורך $2n$ מעל הא"ב $\{(,)\}$ (של סוגריים) נקראת **מאוזנת** אם

1. יש n מופעים של).
2. בכל רישא מספר המופעים של) אינו עולה על מספר המופעים של).

הגדרה. יהי $n \in \mathbb{N}$. מספר המחרוזות המאוזנות באורך $2n$ C_n נקרא **מספר קטלן** ה-n-י.

משפט. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

משפט. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}$.

הערה. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-2}^{2} t^{2n}\sqrt{4-t^2}dt$$

אם $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מוגדרת על ידי

$$\forall i,j \in [n]\,.\ c_{ij} = C_{i+j}$$

אזי

$$\det(C) = 1$$

פונקציות יוצרות

פונקציות יוצרות

הגדרה. תהא $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרת מספרים. **הפונקציה היוצרת** של a מוגדרת להיות

$$A(x) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

המקדם של x^n ב-$A(x)$ מסומן על ידי

$$[x^n]\,A(x) \triangleq a_n$$

טענה. הפונקציה היוצרת של הסדרה $\{1\}_{n=0}^{\infty}$ היא $\frac{1}{1-x}$.

פעולות על פונקציות יוצרות

הגדרה. תהא $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ויהי $c \in \mathbb{R}$. אם $A(x)$ הפונקציה היוצרת של a אז נגדיר

$$A(cx) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} a_n (cx)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n c^n)\, x^n$$

טענה. תהא $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ויהי $c \in \mathbb{R}$. אם $A(x)$ הפונקציה היוצרת של a אז

$$[x^n]\,A(cx) = c^n a_n$$

הגדרה. תהנא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty},b=\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. אם $A(x),B(x)$ הפונקציות היוצרות של a,b בהתאמה נגדיר את **החיבור**

$$(A+B)(x)=A(x)+B(x)$$

טענה. תהנא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty},b=\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. אם $A(x),B(x)$ הפונקציות היוצרות של a,b בהתאמה אז

$$[x^n](A+B)(x)=(a+b)_n$$

הגדרה. אם $A(x)$ הפונקציה היוצרת של $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ אז נסמן

$$A(x)\longleftrightarrow a_n$$

או

$$A(x)\longleftrightarrow a$$

הגדרה. תהא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש-$A(x)$ הפונקציה היוצרת שלה. נגדיר את **הנגזרת**

$$A'(x)\triangleq\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

טענה. תהא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש-$A(x)$ הפונקציה היוצרת שלה. אזי

$$xA'(x)\longleftrightarrow na_n$$

טענה. לכל $m\geq 0$ מתקיים

$$\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}\longleftrightarrow\binom{n}{m}$$

הגדרה. תהא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש-$A(x)$ הפונקציה היוצרת שלה. נגדיר את **האינטגרל**

$$\int_0^x A(t)\,dt\triangleq\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^x t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

טענה. תהא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש-$A(x)$ הפונקציה היוצרת שלה. אזי

$$\int_0^x A(t)\,dt\longleftrightarrow\begin{cases}\frac{a_{n-1}}{n} & n\neq 0\\ 0 & n=0\end{cases}$$

טענה. מתקיים

$$\ln\frac{1}{1-x}\longleftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{n} & n\neq 0\\ 0 & n=0\end{cases}$$

הגדרה. תהנא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty},b=\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרות מספרים. **הקונבולוציה** $a*b$ מוגדרת לכל $n\in\mathbb{N}$ להיות

$$(a*b)_n\triangleq\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$$

טענה. תהנא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty},b=\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרות מספרים. אז $a*b=b*a$.

הגדרה. תהנא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty},b=\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרות מספרים. אם $A(x),B(x)$ הפונקציות היוצרות של a,b בהתאמה נגדיר את **הכפל**

$$(A\cdot B)(x)=A(x)\cdot B(x)$$

טענה. תהנא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty},b=\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרות מספרים. אם $A(x),B(x)$ הפונקציות היוצרות של a,b בהתאמה אז

$$(A\cdot B)(x)\longleftrightarrow a*b$$

חילוף מקדמים

משפט (טיילור). תהא $f(x)$ פונקציה יוצרת. אזי

$$f(x)\longleftrightarrow\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

הגדרה. לכל $x\in\mathbb{R}$ ו-$n\in\mathbb{N}$ נגדיר את **המקדם הבינומי** $\binom{x}{n}$ כך שמתקיים

$$\binom{x}{n}\triangleq\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)}{n!}=\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))}{n!}$$

משפט (הבינום של ניוטון). לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$(1+x)^{\alpha}\longleftrightarrow\binom{\alpha}{n}$$

טענה. לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$\binom{\frac{1}{2}}{n}=\frac{2}{4^n}(-1)^{n+1}C_{n-1}$$

השיטה הסימבולית

הגדרה. **מחלקה קומבינטורית** היא קבוצה $\mathcal{A}$ יחד עם **פונקצית גודל** $|\cdot|:\mathcal{A}\to\mathbb{N}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ יש מספר סופי של איברים ב-$\mathcal{A}$ מגודל n. כלומר, לכל $n\in\mathbb{N}$ הקבוצה

$$\{a\in\mathcal{A}\,|\,|a|=n\}$$

סופית.

הגדרה. **הפונקציה היוצרת** של מחלקה קומבינטורית $(\mathcal{A},|\cdot|)$ מוגדרת על ידי

$$A(x)=\sum_{a\in\mathcal{A}}x^{|a|}=\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}|\{a\in\mathcal{A}\,|\,|a|=n\}|\,x^n$$

הגדרה (המחלקה האטומית). $\{a\} \triangleq \mathcal{X}_a$ מחלקה המכילה אך ורק את האיבר a וגודלו $|a| = 1$. הפונקציה היוצרת המתאימה היא $X_a(x) = x$. בדרך כלל נסמן $\mathcal{X}_a =: a$.

הגדרה (המחלקה ε). נסמן ב-ε את המחלקה המכילה איבר אחד מגודל 0.

$$\varepsilon(x) = 1$$

פעולות על מחלקות

הגדרה. תהינא $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ מחלקות קומבינטוריות זרות. אז $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ היא המחלקה $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, |\cdot|_{\mathcal{A}} \cup |\cdot|_{\mathcal{B}})$.

טענה. תהינא $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ מחלקות קומבינטוריות זרות. אז $(A + B)(x) = A(x) + B(x)$.

הגדרה. תהינא $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ מחלקות קומבינטוריות. אז $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ היא המחלקה $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, |(\cdot, *)| = |\cdot|_{\mathcal{A}} + |*|_{\mathcal{B}})$.

טענה. תהינא $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ מחלקות קומבינטוריות. אז $(A \times B)(x) = A(x)\, B(x)$.

הגדרה. תהא $\mathcal{A}$ מחלקה קומבינטורית. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^0 &\triangleq \varepsilon \\ \mathcal{A}^2 &\triangleq \mathcal{A} \times \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^n &\triangleq \mathcal{A}^{n-1} \times \mathcal{A} \end{aligned}$$

הגדרה. אם $\mathcal{A}$ מחלקה קומבינטורית כך ש-

$$\{a \in \mathcal{A} \,|\, |a| = 0\} = \emptyset$$

אז $\mathrm{SEQ}(\mathcal{A})$ היא המחלקה המוגדרת על ידי

$$\mathrm{SEQ}(\mathcal{A}) \triangleq \mathcal{A}^0 + \mathcal{A}^1 + \mathcal{A}^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n$$

טענה. תהא $\mathcal{A}$ מחלקה קומבינטורית. אז הפונקציה היוצרת של $\mathrm{SEQ}(\mathcal{A})$ היא

$$\frac{1}{1 - A(x)}$$

הגדרה. תהא $(\mathcal{A}, |\cdot|)$ מחלקה קומבינטורית כך ש-$\{a \in \mathcal{A} \,|\, |a| = 0\} = \emptyset$. אז $\mathrm{MSet}(\mathcal{A})$ היא מחלקת המולטי קבוצות של A(קבוצה עם חזרות), יחד עם פונקציית הגודל:

$$|\{a_1, \ldots, a_k\}| = \sum_{i=1}^{k} |a_i|$$

טענה. תהא $\mathcal{A}$ מחלקה קומבינטורית. אם $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ הפונקציה היוצרת של $\mathcal{A}$, אז הפונקציה היוצרת של $\mathrm{MSet}(\mathcal{A})$ היא

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - x^n)^{A_n}} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} A(x^n)\right)$$